Grassmann Uzaylarının Geometrisi

İzzet Coşkun

University of Illinois at Chicago

5 Ağustos, 2010

V'nin n-boyutlu bir vektörler uzayı olduğunu varsayalım.

V'nin n-boyutlu bir vektörler uzayı olduğunu varsayalım.

Grassmann uzayı $G(k, n)$, V'nin k-boyutlu alt vektör uzaylarını parametre eden uzaydır.

V'nin n-boyutlu bir vektörler uzayı olduğunu varsayalım.

Grassmann uzayı $G(k,n)$, V'nin k-boyutlu alt vektör uzaylarını parametre eden uzaydır.

Örneğin, $G(2,4)$ 4-boyutlu bir vektörler uzayının 2-boyutlu alt uzaylarını parametre eder. İzdüşümsel geometride, $G(2,4)$'ü 3-boyutlu izdüşümsel düzlemdeki doğruları parametre eden uzay olarak da düşünebiliriz.

Q'nun, V-üzerinde dejenere olmayan bir bilineer form olduğunu varsayalım.

Q'nun, V-üzerinde dejenere olmayan bir bilineer form olduğunu varsayalım.

Kompleks sayılar üzerinde Q'yu

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

olarak alabiliriz.

Q'nun, V-üzerinde dejenere olmayan bir bilineer form olduğunu varsayalım.

Kompleks sayılar üzerinde Q'yu

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

olarak alabiliriz.

Eğer V'nin bir alt uzayı U için $Q|_U = 0$ ise, U'ya V'nin Q-izotropik alt uzayı denir.

Q'nun, V-üzerinde dejenere olmayan bir bilineer form olduğunu varsayalım.

Kompleks sayılar üzerinde Q'yu

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

olarak alabiliriz.

Eğer V'nin bir alt uzayı U için $Q|_U = 0$ ise, U'ya V'nin Q-izotropik alt uzayı denir.

Ortogonal Grassmann uzayı $OG(k, n)$, V'nin Q-izotropik k-boyutlu alt vektör uzaylarını parametre eden uzaydır.

Grassmann uzayları, cebirsel geometri, kombinatorik ve temsiller teorisinde çok önemli bir rol oynar.

Grassmann uzayları, cebirsel geometri, kombinatorik ve temsiller teorisinde çok önemli bir rol oynar.

$0 < a_1 < \cdots < a_k \leq n$ bir dizi pozitif tam sayı olsun.

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n = V$$

bir bayrak olsun.

Grassmann uzayları, cebirsel geometri, kombinatorik ve temsiller teorisinde çok önemli bir rol oynar.

$0 < a_1 < \cdots < a_k \leq n$ bir dizi pozitif tam sayı olsun.

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n = V$$

bir bayrak olsun.

$\sigma_{a_1,\ldots,a_k}$ Schubert sınıfı

$$\{U \in G(k,n) \mid \dim(U \cap F_{a_i}) \geq i\}$$

Schubert uzayının kohomoloji sınıfıdır.

Grassmann uzayları, cebirsel geometri, kombinatorik ve temsiller teorisinde çok önemli bir rol oynar.

$0 < a_1 < \cdots < a_k \leq n$ bir dizi pozitif tam sayı olsun.

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n = V$$

bir bayrak olsun.

$\sigma_{a_1,\ldots,a_k}$ Schubert sınıfı

$$\{U \in G(k,n) \mid \dim(U \cap F_{a_i}) \geq i\}$$

Schubert uzayının kohomoloji sınıfıdır.

Schubert sınıfları $G(k,n)$'nin kohomolojisinin ayrıcalıklı bir tabanını oluşturur.

İki Schubert sınıfının çarpımı Schubert sınıflarının toplamı olarak yazılabilir.

$$\sigma_a \cdot \sigma_b = \sum k_{a,b}^{c} \sigma_c$$

İki Schubert sınıfının çarpımı Schubert sınıflarının toplamı olarak yazılabilir.

$$\sigma_a \cdot \sigma_b = \sum k_{a,b}^c \sigma_c$$

$k_{a,b}^c$ katsayıları doğal sayılardır ve bunlara Littlewood-Richardson katsayıları denir.

İki Schubert sınıfının çarpımı Schubert sınıflarının toplamı olarak yazılabilir.

$$\sigma_a \cdot \sigma_b = \sum k_{a,b}^c \sigma_c$$

$k_{a,b}^c$ katsayıları doğal sayılardır ve bunlara Littlewood-Richardson katsayıları denir.

Bu katsayılar temsiller teorisinde de önemli bir rol oynar. V_1 ve V_2 $GL(n)$'in indirgenemez iki temsili olsun. Bu temsillerin tensör çarpımlarındaki indirgenemez temsillerin katsayıları da Littlewood-Richardson katsayıları tarafından verilir.

Schubert sınıfları $OG(k, n)$'nin kohomolojisinin de ayrıcalıklı bir tabanını oluşturur.

Schubert sınıfları $OG(k,n)$'nin kohomolojisinin de ayrıcalıklı bir tabanını oluşturur.

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_s \leq n/2$$

ve

$$(n-1)/2 \geq b_{s+1} > \cdots > b_k \geq 0$$

iki tam sayı dizisi olsun. Tüm i, j indeksleri için $a_i \neq b_j + 1$ olduğunu varsayalım.

Schubert sınıfları $OG(k,n)$'nin kohomolojisinin de ayrıcalıklı bir tabanını oluşturur.

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_s \leq n/2$$

ve

$$(n-1)/2 \geq b_{s+1} > \cdots > b_k \geq 0$$

iki tam sayı dizisi olsun. Tüm i,j indeksleri için $a_i \neq b_j + 1$ olduğunu varsayalım.

$$F_{a_1} \subset F_{a_2} \subset \cdots \subset F_{a_s} \subset F_{b_{s+1}}^{\perp} \subset \cdots \subset F_{b_k}^{\perp}$$

bir Q-izotropic bayrak olsun.

Schubert sınıfları $OG(k,n)$'nin kohomolojisinin de ayrıcalıklı bir tabanını oluşturur.

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_s \leq n/2$$

ve

$$(n-1)/2 \geq b_{s+1} > \cdots > b_k \geq 0$$

iki tam sayı dizisi olsun. Tüm i, j indeksleri için $a_i \neq b_j + 1$ olduğunu varsayalım.

$$F_{a_1} \subset F_{a_2} \subset \cdots \subset F_{a_s} \subset F_{b_{s+1}}^{\perp} \subset \cdots \subset F_{b_k}^{\perp}$$

bir Q-izotropic bayrak olsun.

Schubert sınıfı $\sigma_{a_1,\ldots,a_s}^{b_{s+1},\ldots,b_k}$

$$\{U \in OG(k,n) \mid \dim(U \cap F_{a_i}) \geq i, \dim(U \cap F_{b_j}^{\perp}) \geq j\}$$

Schubert uzayının kohomoloji sınıfıdır.

Bugün, cebirsel geometri, kombinatorik ve temsiller teorisinin kesiştiği bir başka problemden bahsetmek istiyorum.

Bugün, cebirsel geometri, kombinatorik ve temsiller teorisinin kesiştiği bir başka problemden bahsetmek istiyorum.

Doğal olarak

$$i : OG(k, n) \hookrightarrow G(k, n)$$

Bugün, cebirsel geometri, kombinatorik ve temsiller teorisinin kesiştiği bir başka problemden bahsetmek istiyorum.

Doğal olarak

$$i : OG(k, n) \hookrightarrow G(k, n)$$

$$i^* : H^*(G(k, n), \mathbb{Z}) \to H^*(OG(k, n), \mathbb{Z})$$

Bugün, cebirsel geometri, kombinatorik ve temsiller teorisinin kesiştiği bir başka problemden bahsetmek istiyorum.

Doğal olarak

$$i : OG(k, n) \hookrightarrow G(k, n)$$

$$i^* : H^*(G(k, n), \mathbb{Z}) \to H^*(OG(k, n), \mathbb{Z})$$

Kohomolojideki i^* fonksiyonunu hesaplmaya *geometrik dallanma problemi* diyebiliriz.

Bugün, cebirsel geometri, kombinatorik ve temsiller teorisinin kesiştiği bir başka problemden bahsetmek istiyorum.

Doğal olarak

$$i : OG(k, n) \hookrightarrow G(k, n)$$

$$i^* : H^*(G(k, n), \mathbb{Z}) \to H^*(OG(k, n), \mathbb{Z})$$

Kohomolojideki i^* fonksiyonunu hesaplmaya *geometrik dallanma problemi* diyebiliriz.

Daha somut olarak,

$$i^*(\sigma_\lambda) = \sum c_\lambda^{a,b} \sigma_a^b$$

geometrik dallanma problemi $c_\lambda^{a,b}$ katsayılarını hesaplamaya eşdeğerdir.

Bu problemin temsiller teorisindeki karşılığını şöyle açıklayabiliriz.

G'nin bir grup olduğunu varsayalım. H'nin G'nin bir alt grubu olduğunu varsayalım. V G'nin indirgenemez bir temsilini ifade etsin. V'nin H'ye kısıtlaması, H'nin indirgenemez bileşenlerine ayrıştırılabilir:

$$V\big|_H = \bigoplus c_i V_i.$$

Bu problemin temsiller teorisindeki karşılığını şöyle açıklayabiliriz.

G'nin bir grup olduğunu varsayalım. H'nin G'nin bir alt grubu olduğunu varsayalım. V G'nin indirgenemez bir temsilini ifade etsin. V'nin H'ye kısıtlaması, H'nin indirgenemez bileşenlerine ayrıştırılabilir:

$$V\big|_H = \bigoplus c_i V_i.$$

c_i katsayılarını hesaplamaya temsiller teorisinde *dallanma problemi* denir.

Bu problemin temsiller teorisindeki karşılığını şöyle açıklayabiliriz.

G'nin bir grup olduğunu varsayalım. H'nin G'nin bir alt grubu olduğunu varsayalım. V G'nin indirgenemez bir temsilini ifade etsin. V'nin H'ye kısıtlaması, H'nin indirgenemez bileşenlerine ayrıştırılabilir:

$$V\big|_H = \bigoplus c_i V_i.$$

c_i katsayılarını hesaplamaya temsiller teorisinde *dallanma problemi* denir.

$G = SL(n)$ ve $H = SO(n)$ olarak alındığında, Berenstein ve Sajmar'ın teoremi geometrik dallanma problemi ile temsiller teorisindeki dallanma probleminin arasındaki yakın ilgiyi açıklar.

4 Temel Kural

4 Temel Kural

- $d \geq r + 3$, yoksa Q indirgenebilir.

4 Temel Kural

- $d \geq r + 3$, yoksa Q indirgenebilir.
- Eğer $Q^{r_1}_{d_1} \subset Q^{r_2}_{d_2}$, $d_1 + r_1 \leq d_2 + r_2$.

4 Temel Kural

- $d \geq r + 3$, yoksa Q indirgenebilir.
- Eğer $Q^{r_1}_{d_1} \subset Q^{r_2}_{d_2}$, $d_1 + r_1 \leq d_2 + r_2$.
- Q^r_d üzerinde bulunan en büyük boyutlu lineer düzlemin boyutu en fazla

$$r + \lfloor \frac{d-r}{2} \rfloor$$

olabilir. j boyutlu lineer bir düzlem, Q'nun singüler uzamını en az

$$j - \lfloor \frac{d-r}{2} \rfloor$$

boyutlu bir düzlemde keser.

4 Temel Kural

- $d \geq r + 3$, yoksa Q indirgenebilir.
- Eğer $Q^{r_1}_{d_1} \subset Q^{r_2}_{d_2}$, $d_1 + r_1 \leq d_2 + r_2$.
- Q^r_d üzerinde bulunan en büyük boyutlu lineer düzlemin boyutu en fazla
$$r + \lfloor \frac{d-r}{2} \rfloor$$
olabilir. j boyutlu lineer bir düzlem, Q'nun singüler uzamını en az
$$j - \lfloor \frac{d-r}{2} \rfloor$$
boyutlu bir düzlemde keser.
- Eğer j boyutlu bir düzlem Q'nun singüler uzamını m boyutlu bir düzlemde kesiyorsa, Gauss fonksiyonunun görüntüsünün boyutu en fazla $j - m - 1$ dir.

$$L_{n_1} \subset L_{n_2} \subset \cdots \subset L_{n_s} \subset Q_{d_{k-s}}^{r_{k-s}} \subset \cdots \subset Q_{d_1}^{r_1}$$

bir dizi izotropik lineer uzay ve bilineer form olsun.

$$L_{n_1} \subset L_{n_2} \subset \cdots \subset L_{n_s} \subset Q^{r_{k-s}}_{d_{k-s}} \subset \cdots \subset Q^{r_1}_{d_1}$$

bir dizi izotropik lineer uzay ve bilineer form olsun.

4 temel kural doğrultusunda şunları varsayalım:

1. $d_{k-s} \geq r_{k-s} + 3$

$$L_{n_1} \subset L_{n_2} \subset \cdots \subset L_{n_s} \subset Q_{d_{k-s}}^{r_{k-s}} \subset \cdots \subset Q_{d_1}^{r_1}$$

bir dizi izotropik lineer uzay ve bilineer form olsun.

4 temel kural doğrultusunda şunları varsayalım:

1. $d_{k-s} \geq r_{k-s} + 3$
2. $d_{i+1} + r_{i+1} \leq d_i + r_i \leq n$

$$L_{n_1} \subset L_{n_2} \subset \cdots \subset L_{n_s} \subset Q_{d_{k-s}}^{r_{k-s}} \subset \cdots \subset Q_{d_1}^{r_1}$$

bir dizi izotropik lineer uzay ve bilineer form olsun.

4 temel kural doğrultusunda şunları varsayalım:

1. $d_{k-s} \geq r_{k-s} + 3$
2. $d_{i+1} + r_{i+1} \leq d_i + r_i \leq n$
3. $x_i \geq k - i + 1 - \frac{d_i - r_i}{2}$

$$L_{n_1} \subset L_{n_2} \subset \cdots \subset L_{n_s} \subset Q_{d_{k-s}}^{r_{k-s}} \subset \cdots \subset Q_{d_1}^{r_1}$$

bir dizi izotropik lineer uzay ve bilineer form olsun.

4 temel kural doğrultusunda şunları varsayalım:

1. $d_{k-s} \geq r_{k-s} + 3$
2. $d_{i+1} + r_{i+1} \leq d_i + r_i \leq n$
3. $x_i \geq k - i + 1 - \frac{d_i - r_i}{2}$
4. $n_j \neq r_i + 1$

Kısıtlama uzayları

$$
\begin{aligned}
V(L_\bullet, Q_\bullet) := \{U \in OG(k,n) \mid\ & \dim(U \cap L_{n_j}) = j,\\
& \dim(U \cap Q_{d_i}^{r_i}) \geq k - i + 1,\\
& \dim(U \cap Q_{d_i}^{r_i, sing}) \geq x_i\}
\end{aligned}
$$

Kısıtlama uzayları

$$V(L_\bullet, Q_\bullet) := \{U \in OG(k,n) \mid \begin{array}{l} \dim(U \cap L_{n_j}) = j, \\ \dim(U \cap Q_{d_i}^{r_i}) \geq k - i + 1, \\ \dim(U \cap Q_{d_i}^{r_i, sing}) \geq x_i \} \end{array}$$

Örnekler:

- Eğer her i için $d_i + r_i = n$ ise, $OG(k,n)$'deki Schubert uzaylarını elde ederiz.

Kısıtlama uzayları

$$
\begin{aligned}
V(L_\bullet, Q_\bullet) := \{U \in OG(k,n) \mid \; & \dim(U \cap L_{n_j}) = j, \\
& \dim(U \cap Q_{d_i}^{r_i}) \geq k - i + 1, \\
& \dim(U \cap Q_{d_i}^{r_i, sing}) \geq x_i\}
\end{aligned}
$$

Örnekler:

- Eğer her i için $d_i + r_i = n$ ise, $OG(k,n)$'deki Schubert uzaylarını elde ederiz.
- Eğer $s = 0$ ve her i için $r_i = 0$ ise, $G(k,n)$'nin Schubert uzaylarının $OG(k,n)$'ye kısıtlamasını elde ederiz.

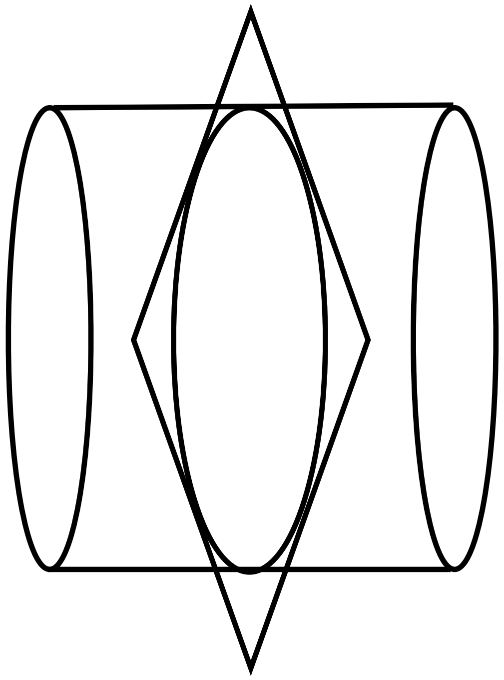
Ana teorem, bir kısıtlama uzayının kohomoloji sınıfını, daha basit kısıtlama uzaylarının kohomoloji sınıflarının toplamı olarak ifade eder.

Ana teorem, bir kısıtlama uzayının kohomoloji sınıfını, daha basit kısıtlama uzaylarının kohomoloji sınıflarının toplamı olarak ifade eder.

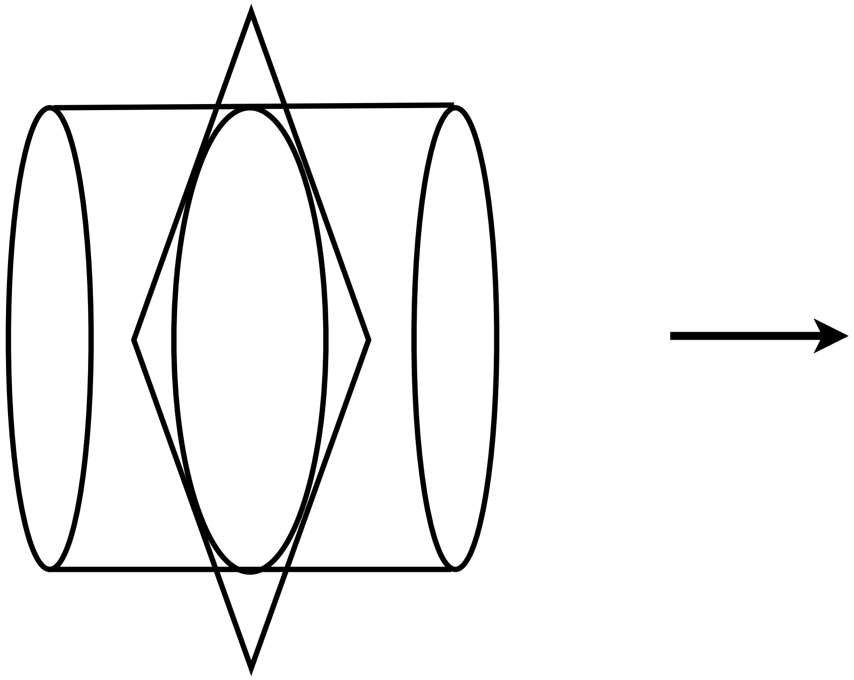
Böylece her kısıtlama uzayının kohomoloji sınıfı Schubert sınıflarının toplamı olarak ifade edilmiş olur.

$V(Q_3^0) \subset OG(1,4)$

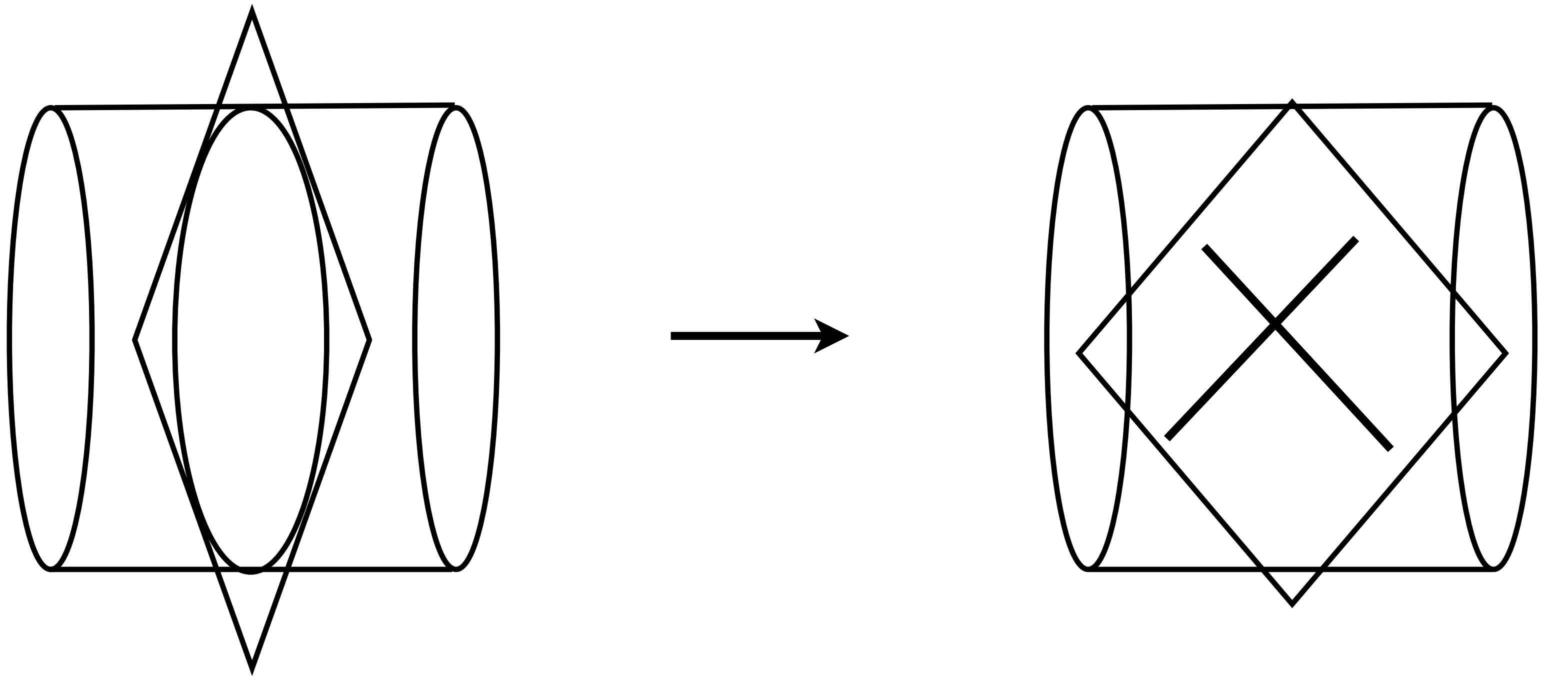
$V(Q_3^0) \subset OG(1,4)$



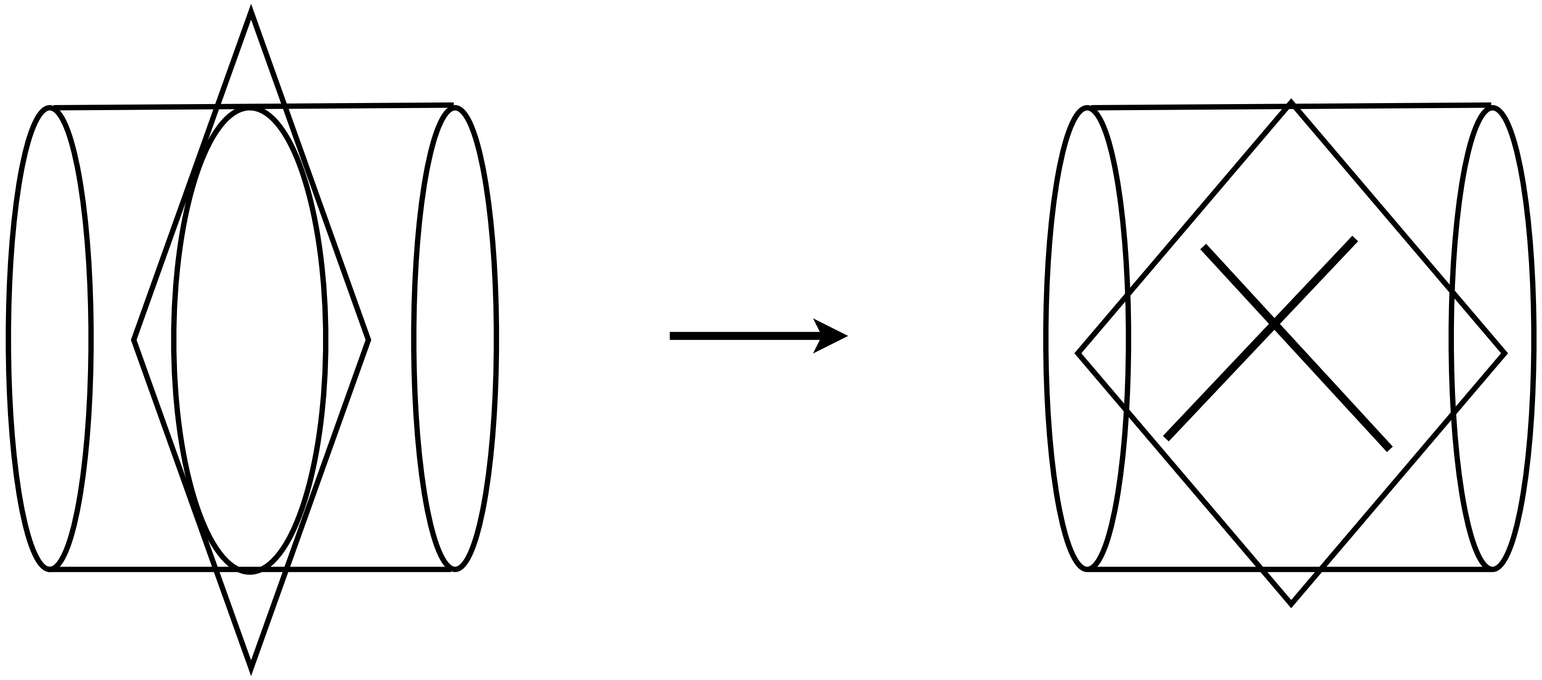
$$V(Q_3^0) \subset OG(1,4)$$



$V(Q_3^0) \subset OG(1,4)$



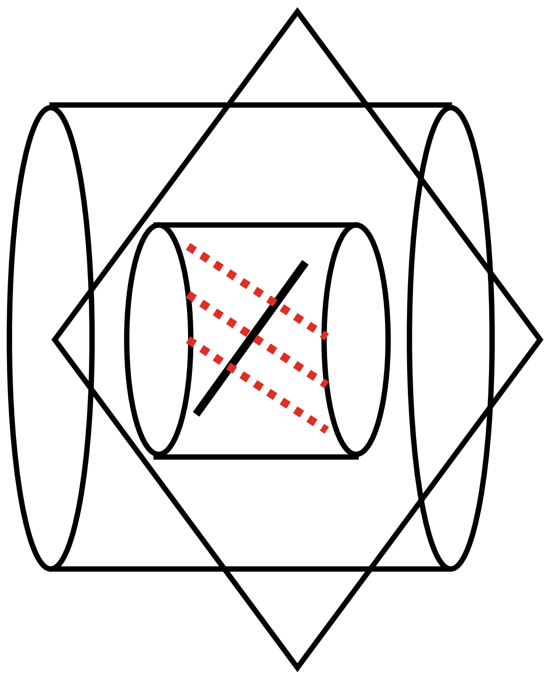
$$V(Q_3^0) \subset OG(1,4)$$



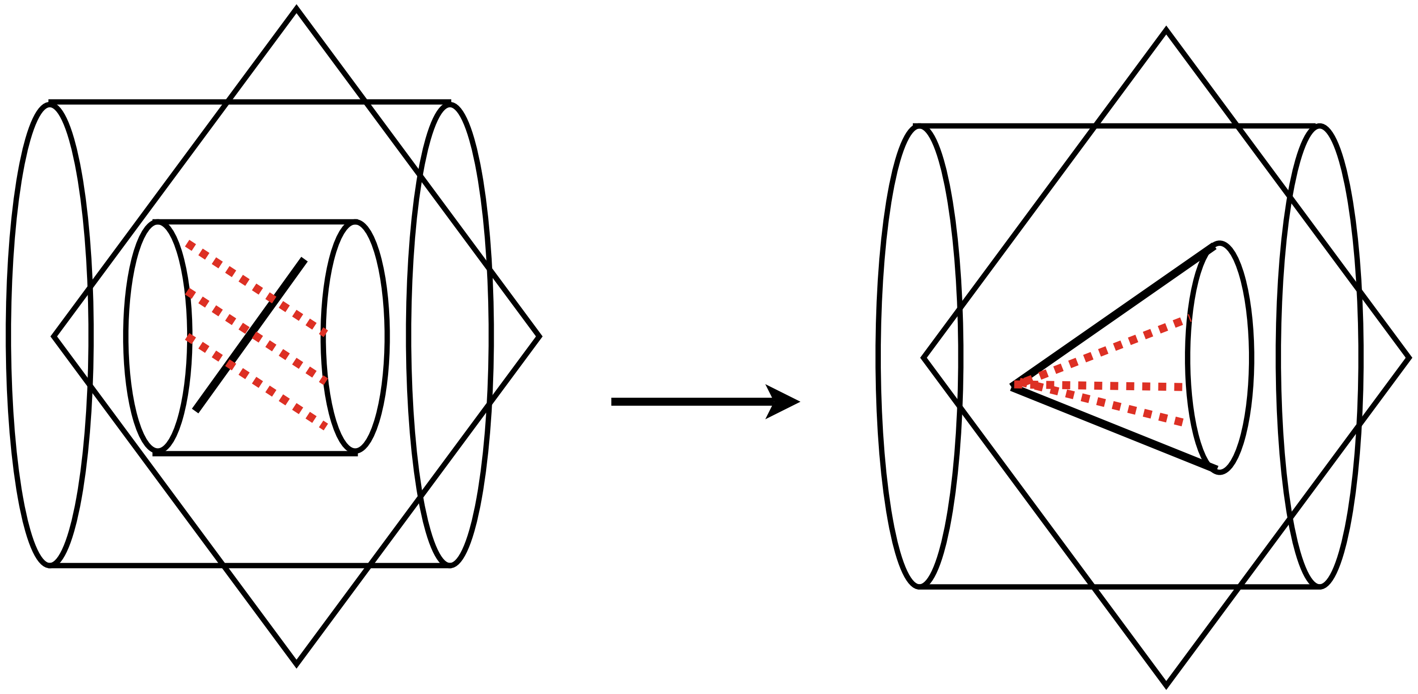
$$[V(Q_3^0)] = [V(L_2)] + [V(L_2')]$$

$$V(L_2 \subset Q_4^0) \subset OG(2,5)$$

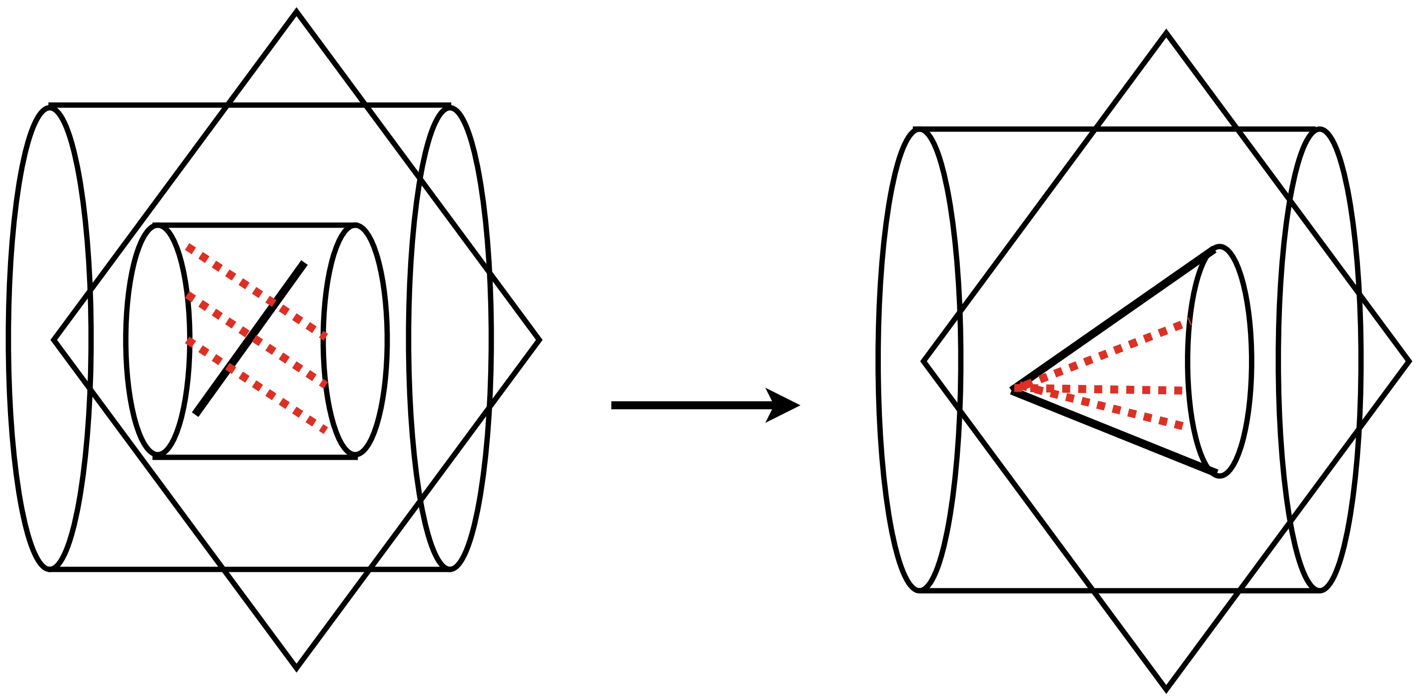
$$V(L_2 \subset Q_4^0) \subset OG(2,5)$$



$$V(L_2 \subset Q_4^0) \subset OG(2,5)$$

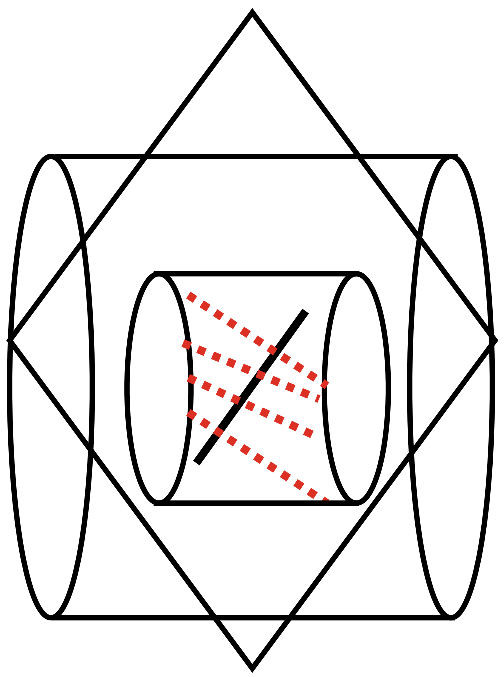


$$V(L_2 \subset Q_4^0) \subset OG(2,5)$$

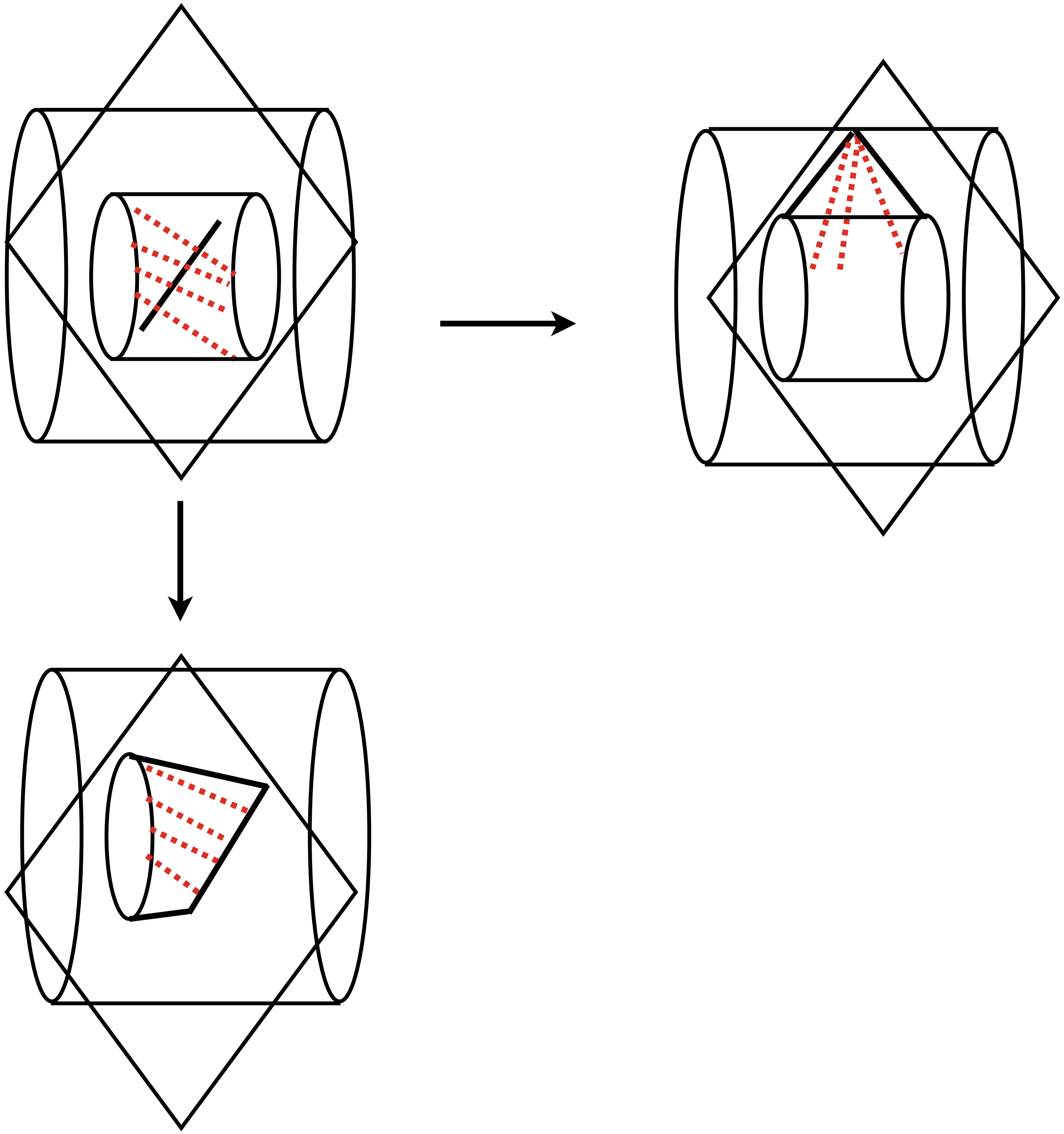


$$[V(L_2 \subset Q_4^0)] = [V(L_1 \subset Q_4^1)]$$

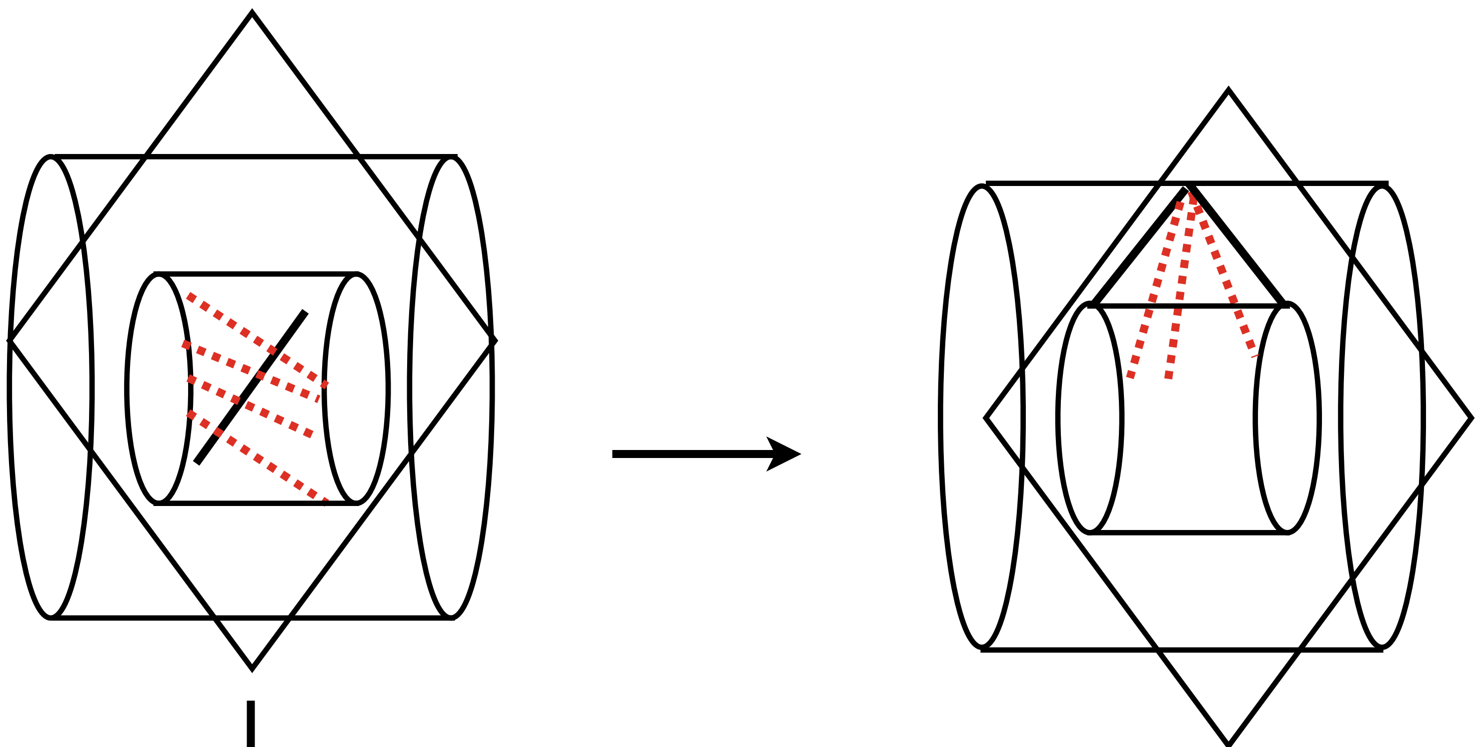
$V(L_2 \subset Q_6^0) \subset OG(2,7)$

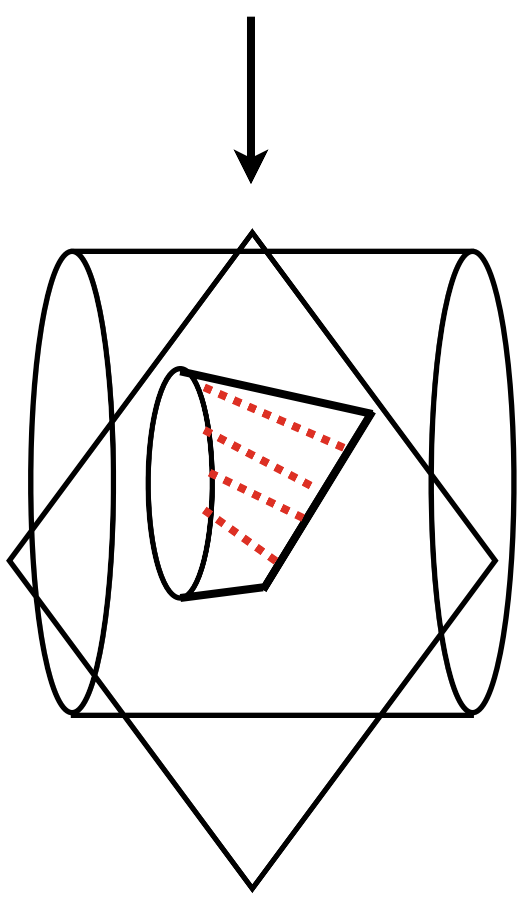


$V(L_2 \subset Q_6^0) \subset OG(2,7)$



$$V(L_2 \subset Q_6^0) \subset OG(2,7)$$





$$[V(L_2 \subset Q_6^0)] = [V(L_1 \subset Q_6^1)] + [V(L_2 \subset Q_5^2)]$$

Ek Neticeler

- Desale ve Ramanan'ın bir teoremi, cinsi g hipereliptik eğriler üzerindeki tekil determinantlı rank-2 vektör demetlerini parametre eden moduli uzaylarını $OG(g-1, 2g+2)$'nin bir alt kümesi olarak ifade eder. Ana teorem bu uzayların kohomoloji sınıfını hesaplamamızı sağlar.

Ek Neticeler

- Desale ve Ramanan'ın bir teoremi, cinsi g hipereliptik eğriler üzerindeki tekil determinantlı rank-2 vektör demetlerini parametre eden moduli uzaylarını $OG(g-1, 2g+2)$'nin bir alt kümesi olarak ifade eder. Ana teorem bu uzayların kohomoloji sınıfını hesaplamamızı sağlar.

- Eğer n bir tek sayı ise, ana teorem aynı zamanda ortogonal Grassmann uzaylarındaki Schubert sınıflarını kısıtlama uzayları cinsinden yazmamızı sağlar. Böylece $OG(k, n)$'nin kohomolojisini hesaplamamız mümkündür.

Ek Neticeler

- Desale ve Ramanan'ın bir teoremi, cinsi g hipereliptik eğriler üzerindeki tekil determinantlı rank-2 vektör demetlerini parametre eden moduli uzaylarını $OG(g-1, 2g+2)$'nin bir alt kümesi olarak ifade eder. Ana teorem bu uzayların kohomoloji sınıfını hesaplamamızı sağlar.

- Eğer n bir tek sayı ise, ana teorem aynı zamanda ortogonal Grassmann uzaylarındaki Schubert sınıflarını kısıtlama uzayları cinsinden yazmamızı sağlar. Böylece $OG(k, n)$'nin kohomolojisini hesaplamamız mümkündür.

- Bu neticeler ortogonal bayrak uzaylarına genellenebilir.

İlginiz için teşekkürler