Modüli Uzaylarının Bi-rasyonel Geometrisi

İzzet Coşkun

University of Illinois at Chicago

6 Ağustos, 2010

$f : X \dashrightarrow Y$ eğer X'in Zariski topolojisindeki açık bir kümede tanımlı bir fonksiyon ise f'ye *rasyonel fonksiyon* denir.

$f : X \dashrightarrow Y$ eğer X'in Zariski topolojisindeki açık bir kümede tanımlı bir fonksiyon ise f'ye *rasyonel fonksiyon* denir.

Eğer iki uzay X ve Y arasında, tanımlı oldukları yerlerde

$$f \circ g = id_Y \quad \text{ve} \quad g \circ f = id_X,$$

koşullarını sağlayan iki rasyonel fonksiyon

$$f : X \dashrightarrow Y, \quad g : Y \dashrightarrow X$$

varsa X ve Y'ye *bi-rasyonel* denir.

$f : X \dashrightarrow Y$ eğer X'in Zariski topolojisindeki açık bir kümede tanımlı bir fonksiyon ise f'ye *rasyonel fonksiyon* denir.

Eğer iki uzay X ve Y arasında, tanımlı oldukları yerlerde

$$f \circ g = id_Y \quad \text{ve} \quad g \circ f = id_X,$$

koşullarını sağlayan iki rasyonel fonksiyon

$$f : X \dashrightarrow Y, \quad g : Y \dashrightarrow X$$

varsa X ve Y'ye *bi-rasyonel* denir.

Bi-rasyonel olmak bir denklik ilişkisidir.

$f : X \dashrightarrow Y$ eğer X'in Zariski topolojisindeki açık bir kümede tanımlı bir fonksiyon ise f'ye *rasyonel fonksiyon* denir.

Eğer iki uzay X ve Y arasında, tanımlı oldukları yerlerde

$$f \circ g = id_Y \quad \text{ve} \quad g \circ f = id_X,$$

koşullarını sağlayan iki rasyonel fonksiyon

$$f : X \dashrightarrow Y, \quad g : Y \dashrightarrow X$$

varsa X ve Y'ye *bi-rasyonel* denir.

Bi-rasyonel olmak bir denklik ilişkisidir.

Cebirsel geometrinin en önemli problemlerinden biri varyetelerin bi-rasyonel sınıflandırılmasıdır.

İki bi-rasyonel, izdüşümsel, pürüzsüz eğri izomorftur.

İki bi-rasyonel, izdüşümsel, pürüzsüz eğri izomorfturlar.

Cinsi $g = 0$ olan tek eğri Riemann küresidir.

İki bi-rasyonel, izdüşümsel, pürüzsüz eğri izomorftur.

Cinsi $g = 0$ olan tek eğri Riemann küresidir.

Cinsi $g = 1$ olan eğrilerin izomorfizm sınıfları Riemann küresi tarafından parametre edilir.

İki bi-rasyonel, izdüşümsel, pürüzsüz eğri izomorfturlar.

Cinsi $g = 0$ olan tek eğri Riemann küresidir.

Cinsi $g = 1$ olan eğrilerin izomorfizm sınıfları Riemann küresi tarafından parametre edilir.

Cinsi $g \geq 2$ olan eğrilerin izomorfizm sınıfları $3g - 3$ boyutlu Deligne-Mumford modüli uzayı tarafından parametre edilir.

$$P_{(0,0)}\mathbb{C}^2 := \{((x,y),[u:v]) \mid xv = yu\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$$

$\mathbb{C}^2$'in $(0,0)$daki patlatımı olsun.

$$P_{(0,0)}\mathbb{C}^2 := \{((x,y),[u:v]) \mid xv = yu\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$$

$\mathbb{C}^2$'in $(0,0)$daki patlatımı olsun.

$\mathbb{C}^2$ ve $P_{(0,0)}\mathbb{C}^2$ bi-rasyoneldirler, fakat izomorf değillerdir.

$$P_{(0,0)}\mathbb{C}^2 := \{((x,y),[u:v]) \mid xv = yu\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$$

$\mathbb{C}^2$'in $(0,0)$daki patlatımı olsun.

$\mathbb{C}^2$ ve $P_{(0,0)}\mathbb{C}^2$ bi-rasyoneldirler, fakat izomorf değillerdir.

Bir pürüzsüz yüzeydeki öz-kesişimi -1 olan kürelere *ayrıcalıklı küreler* denir.

$$P_{(0,0)}\mathbb{C}^2 := \{((x,y),[u:v]) \mid xv = yu\} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$$

$\mathbb{C}^2$'in $(0,0)$daki patlatımı olsun.

$\mathbb{C}^2$ ve $P_{(0,0)}\mathbb{C}^2$ bi-rasyoneldirler, fakat izomorf değillerdir.

Bir pürüzsüz yüzeydeki öz-kesişimi -1 olan kürelere *ayrıcalıklı küreler* denir.

Castelnuovo'nun teoremi pürüzsüz yüzeydeki herhangi bir ayrıcalıklı kürenin büzülebileceğini ve elde edilen yüzeyin pürüzsüz olacağını doğrular. Bu büzülme işlemi patlatmanın tersidir.

Castelnuovo'nun teoremi, her yüzeyin bi-rasyonel denklik sınıfının "en basit" üyesini seçmemizi sağlar. Eğer yüzeyde ayrıcalıklı bir küre varsa, bu küreyi büzer ve daha basit bir yüzey elde ederiz. Bu işlem yüzeyin Picard sayısını azalttığı için, sonlu sayıda ayrıcalıklı küre büzüldükten sonra yüzeyde ayrıcalıklı küre kalmaz.

Castelnuovo'nun teoremi, her yüzeyin bi-rasyonel denklik sınıfının "en basit" üyesini seçmemizi sağlar. Eğer yüzeyde ayrıcalıklı bir küre varsa, bu küreyi büzer ve daha basit bir yüzey elde ederiz. Bu işlem yüzeyin Picard sayısını azalttığı için, sonlu sayıda ayrıcalıklı küre büzüldükten sonra yüzeyde ayrıcalıklı küre kalmaz.

Üzerinde ayrıcalıklı küre olmayan yüzeylere *minimal yüzeyler* denir.

Castelnuovo'nun teoremi, her yüzeyin bi-rasyonel denklik sınıfının "en basit" üyesini seçmemizi sağlar. Eğer yüzeyde ayrıcalıklı bir küre varsa, bu küreyi büzer ve daha basit bir yüzey elde ederiz. Bu işlem yüzeyin Picard sayısını azalttığı için, sonlu sayıda ayrıcalıklı küre büzüldükten sonra yüzeyde ayrıcalıklı küre kalmaz.

Üzerinde ayrıcalıklı küre olmayan yüzeylere *minimal yüzeyler* denir.

Minimal Model veya Mori Programı yüzeyler için olan bu teoriyi çok boyutlu varyetelere genellemeyi amaçlar.

Castelnuovo'nun teoremi, her yüzeyin bi-rasyonel denklik sınıfının "en basit" üyesini seçmemizi sağlar. Eğer yüzeyde ayrıcalıklı bir küre varsa, bu küreyi büzer ve daha basit bir yüzey elde ederiz. Bu işlem yüzeyin Picard sayısını azalttığı için, sonlu sayıda ayrıcalıklı küre büzüldükten sonra yüzeyde ayrıcalıklı küre kalmaz.

Üzerinde ayrıcalıklı küre olmayan yüzeylere *minimal yüzeyler* denir.

Minimal Model veya Mori Programı yüzeyler için olan bu teoriyi çok boyutlu varyetelere genellemeyi amaçlar.

Y n-boyutlu pürüzsüz (veya daha genel olarak normal ve Gorenstein) bir varyete olsun. Y'nin kanonik doğru demeti

$$K_Y = \wedge^n T^* Y$$

olarak tanımlanır.

Kanonik halka

$$R(Y) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(Y, mK_Y)$$

şeklinde tanımlanır.

Kanonik halka

$$R(Y) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(Y, mK_Y)$$

şeklinde tanımlanır.

Son yılların en önemli teoremlerinden biri bu halkanın sonlu üretildiğini söyler.

Kanonik halka

$$R(Y) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(Y, mK_Y)$$

şeklinde tanımlanır.

Son yılların en önemli teoremlerinden biri bu halkanın sonlu üretildiğini söyler.

Theorem (Birkar, Cascini, Hacon, McKernan)

$R(Y)$ *sonlu üretilmiş bir halkadır.*

Kanonik halka

$$R(Y) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(Y, mK_Y)$$

şeklinde tanımlanır.

Son yılların en önemli teoremlerinden biri bu halkanın sonlu üretildiğini söyler.

Theorem (Birkar, Cascini, Hacon, McKernan)

$R(Y)$ sonlu üretilmiş bir halkadır.

Eğer Y'nin Kodaira boyutu n ise, kanonik model $\mathrm{Proj}(R(Y))$ Y'nin bi-rasyonel denklik sınıfındaki kanonik bir temsilcisidir.

L doğru demetinin hiçbir eğri ile kesişimi negatif değilse, L'ye NEF denir.

L doğru demetinin hiçbir eğri ile kesişimi negatif değilse, L'ye *NEF* denir.

Eğer Y'nin kanonik doğru demeti NEF ise Y'ye *minimal model* denir.

L doğru demetinin hiçbir eğri ile kesişimi negatif değilse, L'ye *NEF* denir.

Eğer Y'nin kanonik doğru demeti NEF ise Y'ye *minimal model* denir.

Minimal Model Programının amacı herhangi bir varyetenin bir minimal modelini bulmaktır.

L doğru demetinin hiçbir eğri ile kesişimi negatif değilse, L'ye *NEF* denir.

Eğer Y'nin kanonik doğru demeti NEF ise Y'ye *minimal model* denir.

Minimal Model Programının amacı herhangi bir varyetenin bir minimal modelini bulmaktır.

Kollár, Mori, Reid ve Shokourov'un Koni teoremi, K_Y ile kesişimi negatif olan aşıt rasyonel eğrilerin büzülebileceğini garanti eder.

Elde edilen morfizm $f : X \to Y$ için üç ihtimal vardır.

1. $\dim(Y) < \dim(X)$.
2. $\dim(Y) = \dim(X)$ ve f bölensel bir büzülmedir.
3. $\dim(Y) = \dim(X)$ ve f küçük bir büzülmedir.

Elde edilen morfizm $f : X \to Y$ için üç ihtimal vardır.

1. $\dim(Y) < \dim(X)$.
2. $\dim(Y) = \dim(X)$ ve f bölensel bir büzülmedir.
3. $\dim(Y) = \dim(X)$ ve f küçük bir büzülmedir.

3. olasılıkta program X'e uygulanamaz. Y flipi Y^+ ile değiştirilir ve program Y^+'ya uygulanır.

Elde edilen morfizm $f : X \to Y$ için üç ihtimal vardır.

1. $\dim(Y) < \dim(X)$.
2. $\dim(Y) = \dim(X)$ ve f bölensel bir büzülmedir.
3. $\dim(Y) = \dim(X)$ ve f küçük bir büzülmedir.

3. olasılıkta program X'e uygulanamaz. Y flipi Y^+ ile değiştirilir ve program Y^+'ya uygulanır.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f"'] & & X^+ \arrow[dl, "f^+"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

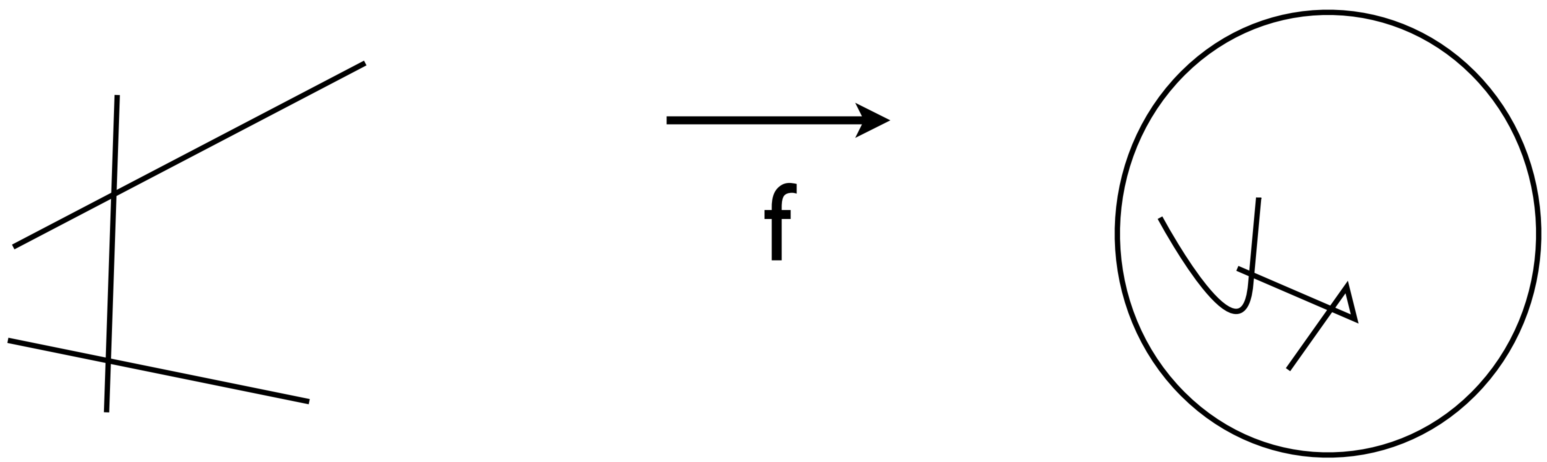
Minimal model programını moduli uzaylarına uygulamak önemli bir problemdir.

Minimal model programını moduli uzaylarına uygulamak önemli bir problemdir.

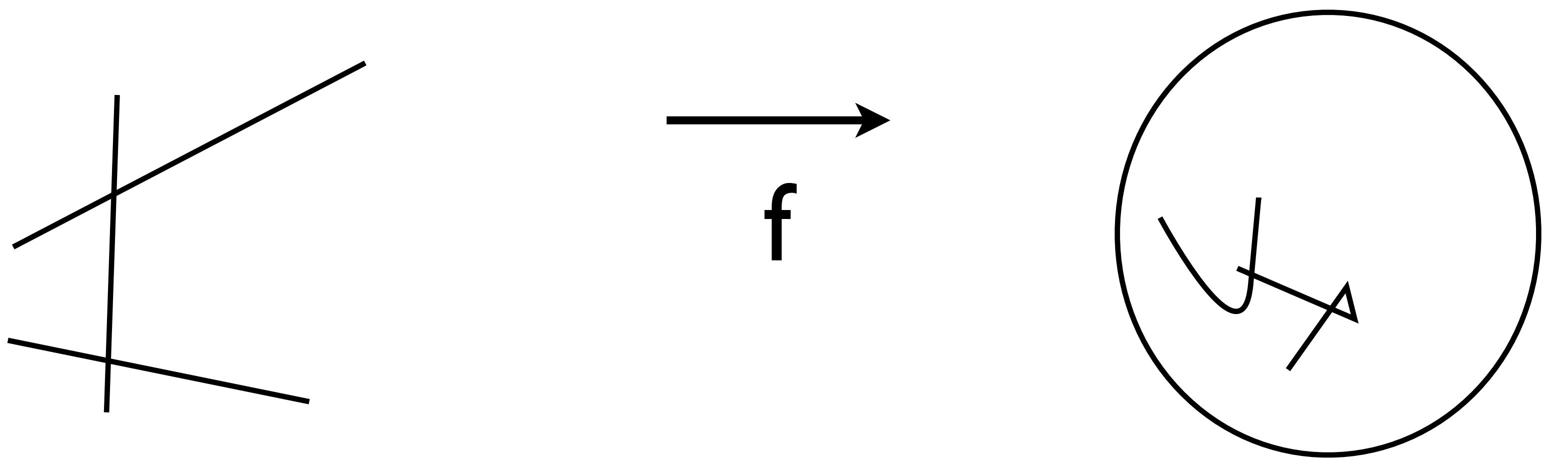
Programın Kontsevich uzaylarına uygulamasını burada örnekleri ile görelim.

$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$ r-boyutlu izdüşümsel uzaydaki d-dereceli rasyonel eğrileri parametre eden Kontsevich uzayı olsun.

$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$ r-boyutlu izdüşümsel uzaydaki d-dereceli rasyonel eğrileri parametre eden Kontsevich uzayı olsun.

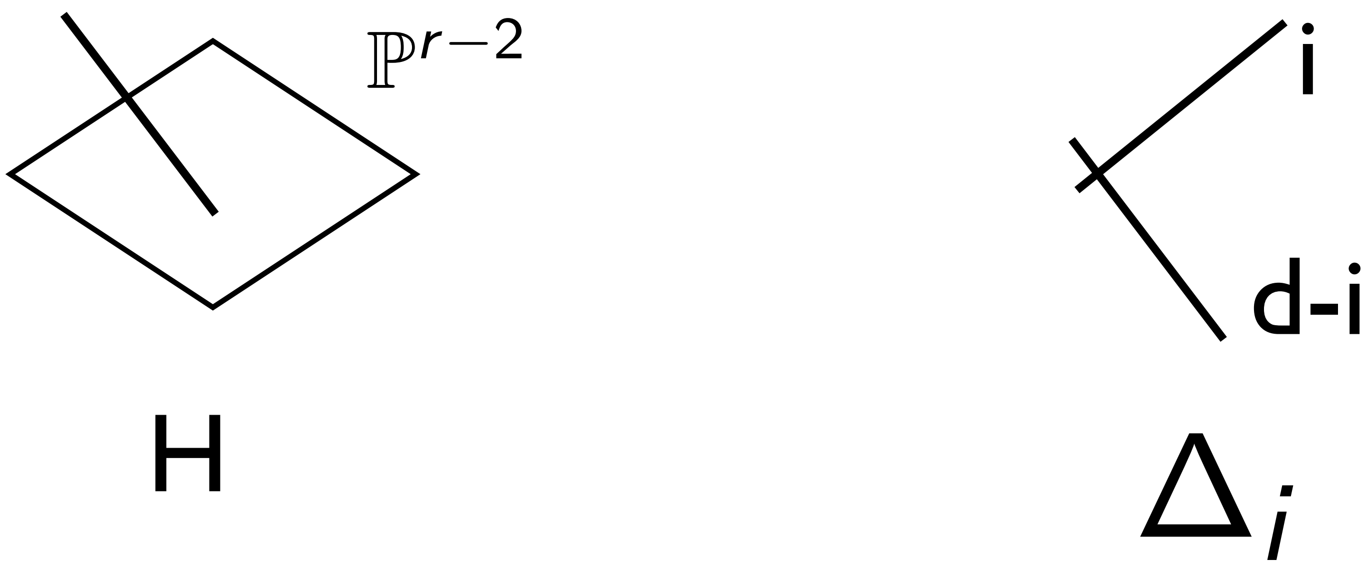


$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$ r-boyutlu izdüşümsel uzaydaki d-dereceli rasyonel eğrileri parametre eden Kontsevich uzayı olsun.

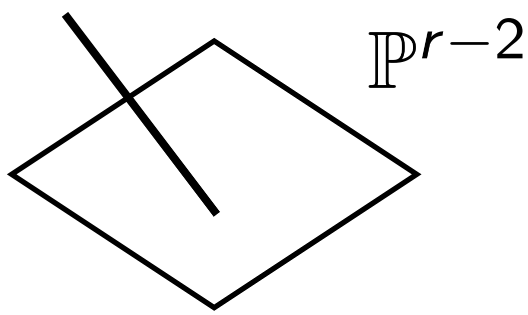


Kontsevich uzayları, rasyonel eğrilerin geometrisinde ve kuantum kohomolojisi teorisinde çok önemli bir rol oynar.

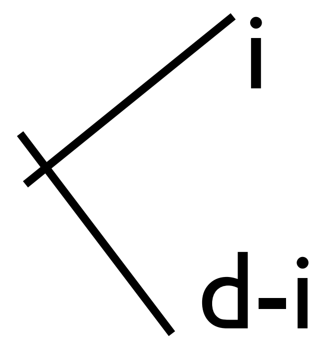
Kontsevich uzaylarında doğal olarak tanımlı bazı bölenler vardır.



Kontsevich uzaylarında doğal olarak tanımlı bazı bölenler vardır.



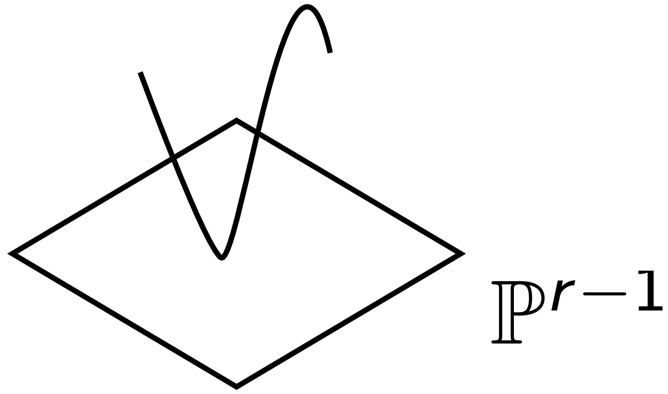
H



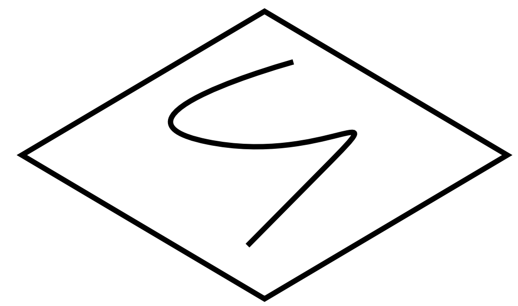
Δ_i

Theorem (Pandharipande)

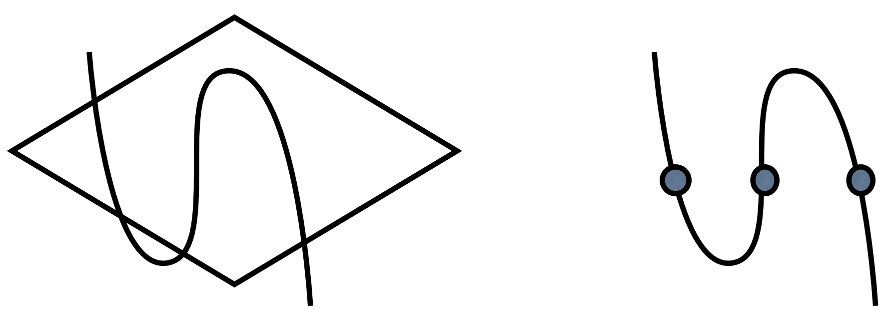
H ve $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\lfloor d/2 \rfloor}$ bölenleri $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$'nin Neron-Severi uzayının bir tabanını oluşturur.



T



D_{deg}



$$v : \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d) \dashrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,d}/\mathfrak{S}_d$$

$$v^* : \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{0,d}/\mathfrak{S}_d) \to \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d))$$

Theorem (-, Harris, Starr)

Eğer $r \geq d$ ise, $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$'nin efektif konisi D_{deg} ve $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\lfloor d/2 \rfloor}$ bölenleri tarafından üretilir.

Theorem (-, Harris, Starr)

Eğer $r \geq d$ *ise,* $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$*'nin efektif konisi* D_{deg} *ve* $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\lfloor d/2 \rfloor}$ *bölenleri tarafından üretilir.*

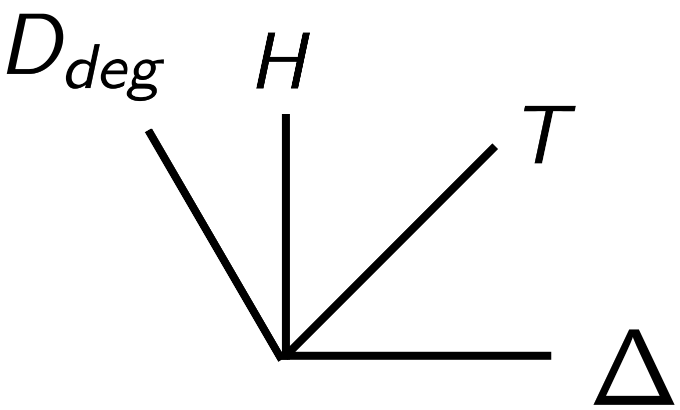
Theorem (-, Harris, Starr)

D*'nin* $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^r, d)$*'de*

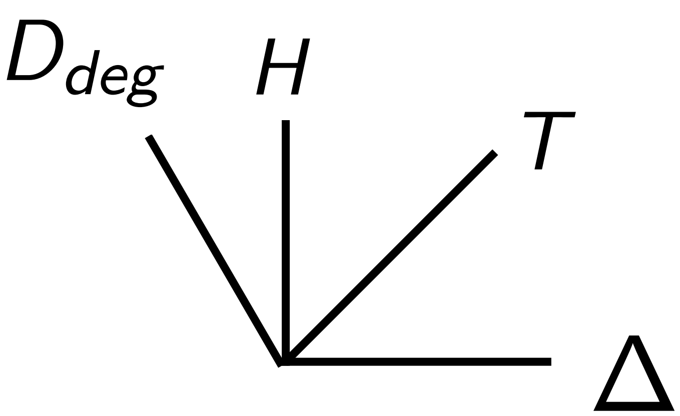
$$D = aT + bH + v(D_1)$$

şeklinde yazılmış bir bölen olduğunu varsayalım. D *yalnız ve yalnız* $a, b \geq 0$ *ve* D_1 *NEF ise NEFtir.*

$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$'nin efektif konisinin taban yerine göre odalara ayrılması

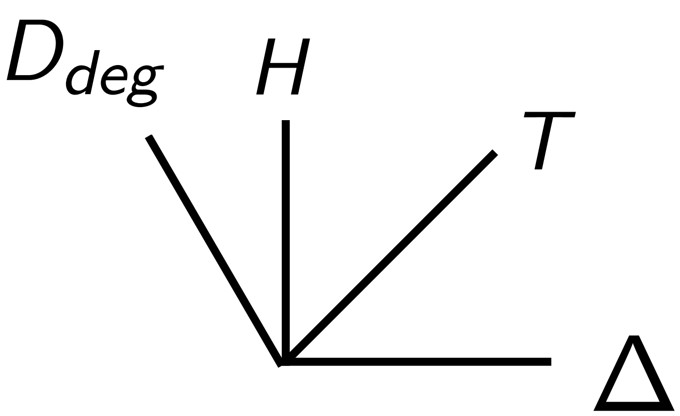


$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$'nin efektif konisinin taban yerine göre odalara ayrılması



Eğer $D \in (H, T)$ ise, $R(D) =$Proj$(\bigoplus_{m\geq 0} H^0(mD))$ modeli Kontsevich uzayıdır.

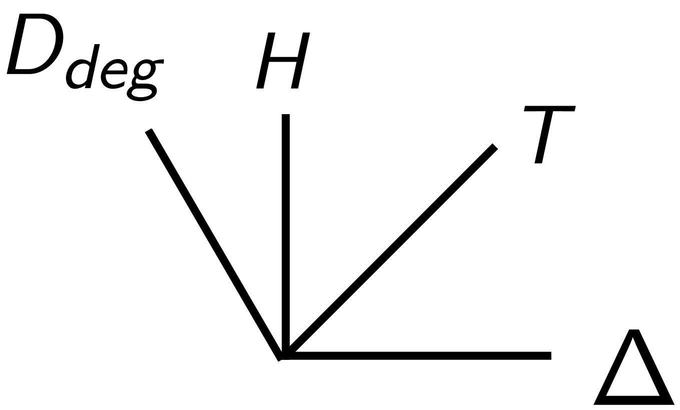
$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$'nin efektif konisinin taban yerine göre odalara ayrılması



Eğer $D \in (H, T)$ ise, $R(D) =$Proj$(\bigoplus_{m\geq 0} H^0(mD))$ modeli Kontsevich uzayıdır.

$f_H : \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) \to \mathbb{P}^5$ bölensel bir büzülmedir.

$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2)$'nin efektif konisinin taban yerine göre odalara ayrılması

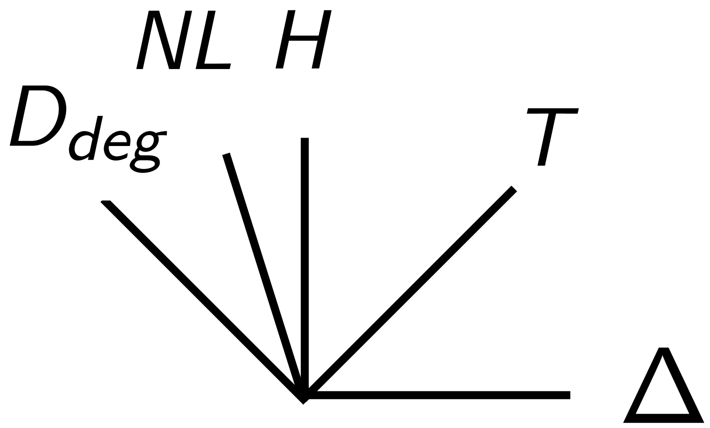


Eğer $D \in (H, T)$ ise, $R(D) =$Proj$(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(mD))$ modeli Kontsevich uzayıdır.

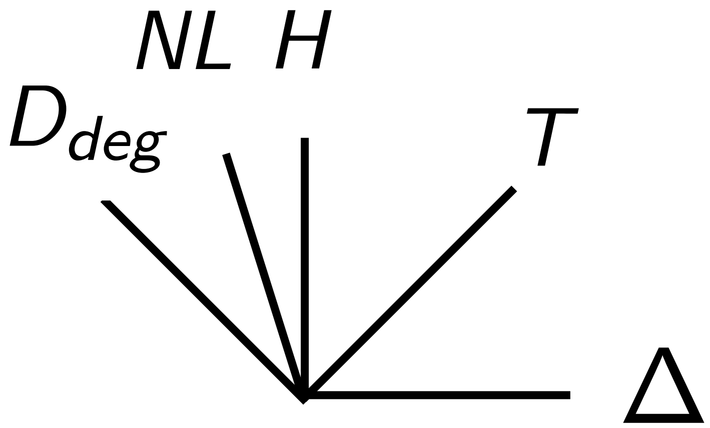
$f_H : \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) \to \mathbb{P}^5$ bölensel bir büzülmedir.

$f_T : \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^2, 2) \to (\mathbb{P}^5)^*$ bölensel bir büzülmedir.

$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3)$'nin efektif konisinin taban yerine göre odalara ayrılması

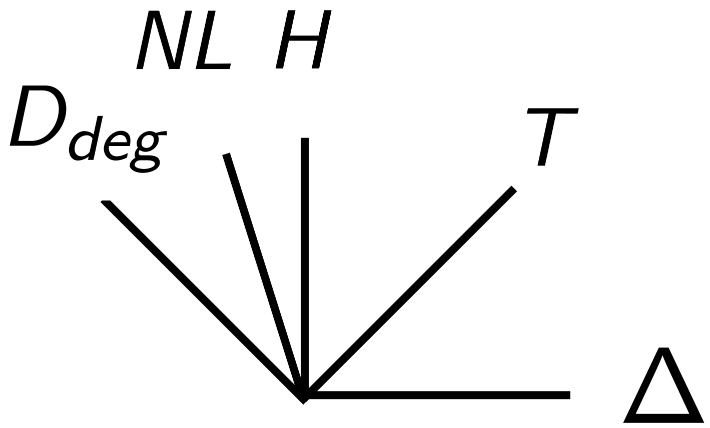


$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3)$'nin efektif konisinin taban yerine göre odalara ayrılması



Eğer $D \in (H, T)$ ise, $R(D) = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(mD))$ modeli Kontsevich uzayıdır.

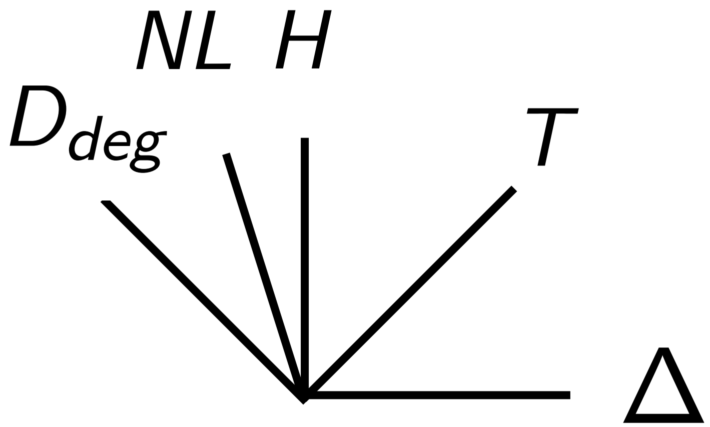
$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3)$'nin efektif konisinin taban yerine göre odalara ayrılması



Eğer $D \in (H, T)$ ise, $R(D) =$Proj$(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(mD))$ modeli Kontsevich uzayıdır.

$f_H : \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3) \to R(H)$ küçük bir büzülmedir. $R(H)$ Chow varyetesinin normalizasyonudur. Bu küçük büzülmenin flipi Hilbert şemasıdır.

$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3)$'nin efektif konisinin taban yerine göre odalara ayrılması

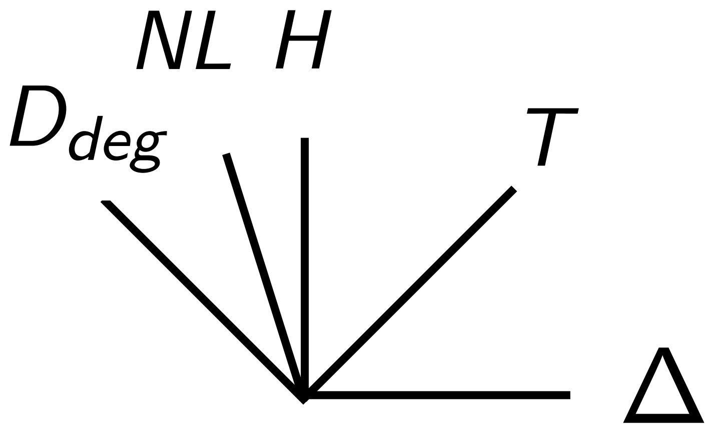


Eğer $D \in (H, T)$ ise, $R(D) = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(mD))$ modeli Kontsevich uzayıdır.

$f_H : \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3) \to R(H)$ küçük bir büzülmedir. $R(H)$ Chow varyetesinin normalizasyonudur. Bu küçük büzülmenin flipi Hilbert şemasıdır.

$f_{NL} : \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3) \to R(NL)$ Hilbert şemasının bölensel bir büzülmesidir.

$\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3)$'nin efektif konisinin taban yerine göre odalara ayrılması



Eğer $D \in (H, T)$ ise, $R(D) = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{m \geq 0} H^0(mD))$ modeli Kontsevich uzayıdır.

$f_H : \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3) \to R(H)$ küçük bir büzülmedir. $R(H)$ Chow varyetesinin normalizasyonudur. Bu küçük büzülmenin flipi Hilbert şemasıdır.

$f_{NL} : \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3) \to R(NL)$ Hilbert şemasının bölensel bir büzülmesidir.

$f_T : \overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbb{P}^3, 3) \to R(T)$ bölensel bir büzülmedir.

İlginiz için teşekkürler