第 25 卷 第 1 期　　应用数学学报　　Vol. 25 No. 1
2002 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2002

证券组合选择的有效子集*

史树中
(北京大学金融数学与金融工程研究中心，北京 100871)
(南开数学研究所 300071)

杨　杰
(南开数学研究所 300071)

摘　要　本文引进证券组合选择的有效子集概念. 有效子集可取代原有的基本证券集来生成 Markowitz 有效组合前沿. 本文给出一个证券集的子集是全集的有效子集的充要条件. 在理论上，这是一条新的 k- 基金分离定理；在实际应用上，这有可能用来减少计算有效组合前沿的计算量.

关键词　Markowitz 组合选择理论，均值一方差分析，有效组合前沿，有效子集

1　引言

Markowitz 的证券组合选择理论 [1,2] 在今天已经成为现代金融经济学的基石. 它不但在理论上使金融经济学从此改观，并且还在证券市场上引起一场“华尔街革命”. 今天人们在处理证券组合中的收益 - 风险分析时，Markowitz 理论始终是一种基本工具.

Markowitz 理论的基本思想在于把证券投资的收益率看作随机变量. 于是该收益率的期望值就是该证券的期望收益，其标准差则可看作证券投资风险的一种度量. 证券组合的收益率可表示为组合中所包含的证券的收益率的仿射组合 (系数和为 1 的线性组合). 这样，证券组合的期望收益等于其包含的各种证券的期望收益的仿射组合，其投资风险就是该仿射组合的收益率的标准差. 对仿射组合的系数解最优化问题：对固定的期望收益，使其方差最小，就形成 Markowitz 理论的基本问题. 基本问题的解称之为 **极小风险组合**，也称为 前沿组合. 前沿组合的全体或其在风险 (收益率的标准差) 和收益 (期望收益率) 坐标平面上对应的点集称为 **组合前沿**. 在风险一收益坐标平面上，以“收益大，风险小”作为半序，那么所有组合的风险和收益对该半序来说的极大元全体就形成这一证券组合选择问题的 **有效 (组合) 前沿** (efficient (portfolio) frontier). 有效前沿中的点所对应的组合则称为证券集的有效组合. 确定证券投资组合的有效前沿对投资者来说，显然是十分重要的.

关于有效组合前沿的计算和应用目前还有许多研究 [3]. 本文则要讨论这样的一个问题：实际应用中可以发现，在有效组合前沿中被选中的证券数目与备选的证券总数相比，往往数量很小，这是否意味着大部分证券实际上在这一组合选择问题中是冗余的？如果确是这样，那么对于某个证券集的一个子集来说，子集的有效前沿恒同于全体的有效前沿的条件是什么？这样的子集我们就称它为原证券集的 **有效子集**.

把这个问题形式化，假定 S_n 为 n 种证券的集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$. 证券的收益率分别为随

本文 1999 年 11 月 29 日收到. 2000 年 7 月 25 日收到修改稿.
*国家自然科学基金委员会重大项目《金融数学、金融工程与金融管理》资助项目.

机变量 $r_1, r_2, \cdots, r_n$, 假设它们的方差有限. 它们的全体构成随机向量 $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^T$.

$$W = \left\{w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1\right\}$$

表示这 n 种证券的收益率组合全体. 对于任何 $w \in W$, 其对应的组合的收益率将是随机变量 $r_w = w^T r = w_1 r_1 + w_2 r_2 + \cdots + w_n r_n$. 又设 $S_k \subset S_n$ 为 k 种证券的集合, 不妨假定 $S_k = \{1, 2, \cdots, k\}$, 则它们的收益率恰好为 $r_1, r_2, \cdots, r_k$. 记 $r^k = (r_1, r_2, \cdots, r_k)^T$. 同时, 又记

$$W^k = \left\{w^k = (w_1, w_2, \cdots, w_k)^T \in \mathbb{R}^k \mid w_1 + w_2 + \cdots + w_k = 1\right\}.$$

我们称 S_k 为 S_n 的 **有效子集** 是指对于任何 $w \in W$, 总存在 $w^k \in W^k$, 使得

$$E[w^T r] \le E\left[(w^k)^T r^k\right], \qquad \mathrm{Var}\left[w^T r\right] \ge \mathrm{Var}\left[(w^k)^T r^k\right].$$

注意到 S_k 是 S_n 的子集, 故 S_k 是 S_n 的有效子集等价于 S_k 的组合前沿恒同于 S_n 的组合前沿, 也等价于 S_k 的有效前沿恒同于 S_n 的有效前沿. 特别是, 当 S_k 的有效前沿与 S_n 的有效前沿均为空集时, 我们也认为它们恒同. 我们将指出 S_k 成为 S_n 的有效子集的充分必要条件. “S_k 生成的组合全体恒同于 S_n 生成的组合全体” 显然是 S_k 为有效子集的充分条件. 但是它并非必要, 即有效子集可以比这样的生成集小得多. 举一个平凡的例子, 如果证券集中只包含无风险证券和若干期望收益率等于无风险利率的风险证券, 那么那些风险证券就都是冗余的. 另一个不难验证的例子是: 如果证券集中只有一种风险证券, 其收益率 r_0 的期望为 μ_0, 标准差为 $\sigma_0 > 0$, 那么对它添加有下列性质的风险证券就是冗余的: 其收益率 r_1 的期望为 μ_0, 与 r_0 的协方差 $\mathrm{Cov}\,[r_1, r_0]$ 满足 $\mathrm{Cov}\,[r_1, r_0] = \sigma_0^2$(参看定理 3.1 的推论)†. 这可能是我们所提到的现象的根本原因.

这个问题并不是新的. 在本文初稿完成后, 我们发现 Szegö[4] 和 Huberman-Kandel[5] 都已用不同的术语考虑过同样的问题. 但他们都假定证券集的收益率协方差矩阵正定. 我们的结果比他们一般得多, 并且证明比较简洁. 另一方面, 它还紧密联系着 Ross[6], Merton[7,8] 等人讨论的共同基金 (mutual-fund) 分离问题. 其典型结果是讨论若干种基金的组合的收益率全体在什么条件下张成所有组合的收益率全体, 或所有在 Rothschild-Stiglitz 风险度量 [9,10] 意义下的有效组合的收益率全体. 这里后一个问题与我们的问题非常相似. 只是其中有效的定义与 Markowitz 意义下的有效相比较弱. 对 Rothschild-Stiglitz 风险度量意义下的 k 基金分离问题, Ross[6] 在带无风险证券的条件下, 给出了用条件期望来刻划的充要条件. 我们的问题实际上是要在 Markowitz 有效意义下找出 k 基金分离的充要条件. 它可以与 Ross 的条件作比较. 我们得到的条件仅用均值和协方差来刻划, 形式上比较简单, 并且有可能用来实际计算. 尤其是二基金情形, CAPM(资本资产定价模型) 式的公式对于 Ross 的情形是必要条件, 而对我们来说却是充要条件. 这就进一步揭示了 CAPM 的本质.

本文的第二节将先简要地回顾经典的 Markowitz 理论. 第三节给出本文的主要定理及其证明. 第四节中将建立另一种经济意义更明确的讨论框架, 其中最主要的一点是考虑了无套利假设, 并给出充要条件的另一种形式. 最后一节是结语.

2 经典的 Markowitz 理论回顾

沿用上节中的符号, Markowitz 考虑的问题可叙述为如何确定 $w \in W$, 使得证券组合在期望收益率一定时, 风险 (收益率的方差或标准差) 最小. 令

$$e = (1, 1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{R}^n,$$
$$\mu_i = E[r_i], \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T,$$

† 这一简单例子类似于 [6,12] 中讨论的一基金分离问题. 参看 [6, 88–90] 页.

$$V=(V_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,n}=\left(\mathrm{Cov}\left[r_i,r_j\right]\right)_{i,j=1,2,\cdots,n},$$

并不妨称 w 为 **组合**, $\mu_w=w^T\mu$ 为 **组合的收益**, $\sigma_w=(w^TVw)^{1/2}$ 为 **组合的风险**. 这样, Markowitz 的均值 - 方差组合选择问题为

$$\begin{aligned}\min\quad & \sigma_w^2=w^TVw=\sum_{i,j=1}^n V_{ij}w_iw_j,\\ \text{s.t.}\quad & w^Te=w_1+w_2+\cdots+w_n=1,\\ & \mu_w=w^T\mu=w_1\mu_1+w_2\mu_2+\cdots+w_n\mu_n=\overline{\mu}.\end{aligned}\tag{1}$$

对于所有可能的组合收益 $\overline{\mu}$ 得到的上述问题的解的全体就是 S_n 的 **极小风险组合**. 如所周知, 一个证券集的有效组合一定是极小风险组合, 但反之不然. 所有非有效的极小风险组合在风险 - 收益平面上对应非有效前沿上的点. 在极端情况下, 甚至有可能所有极小风险组合都不是有效组合. 例如, 设最前面的两种证券是收益率分别为不同常数 μ_1 和 μ_2 的无风险证券, 其它证券都是任意的风险证券. 那么令 $\overline{\mu}=(1-w)\mu_1+w\mu_2$, $\left((1-w),w,0,\cdots,0\right)^T$ 就是上述问题的解. 但是它不是有效组合, 因为用同样方法可生成收益任意大的无风险组合. 这种情况实际上是说明存在套利机会. 如果无套利假设 (参见第四节) 成立, 那么就不可能出现两种不同收益率的无风险证券.

问题 (1) 是一个带线性等式约束的二次凸规划问题. 其 Lagrange 乘子总存在 [10, 279 页]. 因此, 它可用 Lagrange 乘子法来求解, 即 $\overline{w}$ 和 λ_1, λ_2 是其解和 Lagrange 乘子的充要条件为它们满足

$$\begin{cases}2V\overline{w}-\lambda_1\mu-\lambda_2e=0,\\ w_1+w_2+\cdots+w_n=1,\\ w_1\mu_1+w_2\mu_2+\cdots+w_n\mu_n=\overline{\mu}.\end{cases}\tag{2}$$

如果我们去除第一个约束, 那么问题

$$\begin{aligned}\min\quad & \sigma_w^2=w^TVw=\sum_{i,j=1}^n V_{ij}w_iw_j,\\ \text{s.t.}\quad & \mu_w=w^T\mu=w_1\mu_1+w_2\mu_2+\cdots+w_n\mu_n=\widehat{\mu},\end{aligned}\tag{3}$$

相当于在 S_n 中再加入一个零收益率的无风险证券的均值 - 方差组合选择问题. $\widehat{w}$ 和 λ 为其解和 Lagrange 乘子的充要条件为

$$2V\widehat{w}-\lambda\mu=0,\qquad \widehat{w}_1\mu_1+\widehat{w}_2\mu_2+\cdots+\widehat{w}_n\mu_n=\widehat{\mu}.\tag{4}$$

对于一般的加入有常收益率 $\mu_0\neq 0$ 的无风险证券的均值 - 方差组合选择问题可通过用 "超额收益率 (收益率与无风险收益率之差)" 来代替收益率变为上述问题.

如所周知, 当 V 正定, μ_i 不全相等, 那么 (2) 对任何 $\overline{\mu}$ 有唯一解, 并由此可得, 在 (σ_w,μ_w) 平面上, 最优组合 $\overline{w}$ 的收益 $\overline{\mu}$ 与风险 $\overline{\sigma}$ 之间画出了一条双曲线的右半支 (参看 [12,13]). 双曲线的上半部就是这一证券集的 **有效组合前沿**; 下半部则是证券集的 **非有效组合前沿**. 而对于问题 (3), $\widehat{\sigma}$ 与 $\widehat{\mu}$ 之间在 (σ_w,μ_w) 平面上的双曲线关系在这种情形退化为两条直线, 即以原点为起点的两条射线. 其中上面一条射线是组合的有效前沿. 至于在有唯一的无风险证券收益率 $\mu_0\neq 0$ 的情形下, 可把所有证券的收益率都换为 "超额收益率 $(\mu_i-\mu_0)$" 而得到类似结论.

以上的讨论需要 V 正定, 从而排除了这 n 种证券可构成无风险组合以及一种证券的收益率是其它证券收益率的组合的可能. 在附加无套利假设 (参见第四节) 的条件下,

当 V 非正定而问题 (1) 和 (3) 的解存在时，除了解的唯一性和表达式以外，组合前沿的其他性质仍然保持. 这是因为在求解其组合前沿时，通过去除冗余的证券，它们都能适当变换为风险证券有正定的协方差矩阵的、不带或带无风险证券的均值 - 方差证券组合选择问题. 只是当 S_n 有无风险组合时，S_n 的有效组合前沿将变为射线. 为了讨论的一般性，我们以后并不假定 V 正定以及 S_n 中不包含无风险证券；也不假定 S_n 中的期望收益率不全相等. 这样，如果 S_n 的有效组合前沿非空，那么它或是一个孤立点 (所有 μ_i 都相等)，或是双曲线的右上半部 (S_n 的组合中不包括无风险资产)，或是起点在纵轴上的射线 (S_n 的组合中包含无风险资产).

下列定理是所谓 **二基金分离定理**：

定理 2.1 设组合 w_p 和 w_q 分别是均值 - 方差组合选择问题 (1) 对于期望收益率 $\overline{\mu}$ 为 μ_p 和 μ_q 的解. 那么对于任何实数 λ, $\overline{w}=(1-\lambda)w_p+\lambda w_q$ 是 (1) 对于期望收益率 $\overline{\mu}=(1-\lambda)\mu_p+\lambda\mu_q$ 的解. 如果 $\mu_p\neq\mu_q$, 那么这样的 $\overline{w}$ 能生成所有极小风险组合. 如果 w_p 和 w_q 都是有效组合，而 λ 在 0 和 1 之间，那么 $\overline{w}=(1-\lambda)w_p+\lambda w_q$ 也是有效组合. 对于均值 - 方差组合选择问题 (3), 类似的结果也成立.

证明只需注意到问题 (1)(或 (3)) 的解必定满足线性方程组 (2)(或 (4)), 其中前 n 个方程是齐次方程, 故两个解的线性组合必定也满足它们，最后第二个方程对两个解的仿射组合也满足 (对于 (4) 这一方程不存在), 而最后一个方程仅可能使收益 $\overline{\mu}$ 有改变. 后一部分的证明可利用有效前沿的下列性质来得到：收益不小于最小风险组合收益的极小风险组合总是有效组合. 以上的简单证明不同于常见的证明，这里不需要解的表达式，以至不需要 V 正定之类的条件.

3 主要定理及其证明

本文的主要定理如下：

定理 3.1 设 S_n 为 n 种证券的集合 $\{1,2,\cdots,n\}$. $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为其相应的收益率. $S_k=\{1,2,\cdots,k\}\subset S_n$. 那么 S_k 是 S_n 的有效子集的充分必要条件为

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1k} & \mu_1 & 1\\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2k} & \mu_2 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ V_{k1} & V_{k2} & \cdots & V_{kk} & \mu_k & 1\end{pmatrix}$$
$$=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1k} & \mu_1 & 1\\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2k} & \mu_2 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ V_{k1} & V_{k2} & \cdots & V_{kk} & \mu_k & 1\\ V_{k+1,1} & V_{k+2,2} & \cdots & V_{k+1,k} & \mu_{k+1} & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nk} & \mu_n & 1\end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中 $\mu_i=E[r_i]$, $V_{ij}=\operatorname{Cov}[r_i,r_j]$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

证　*必要性*　设 $\overline{w}^k=(\overline{w}_1,\cdots,\overline{w}_k)\in W^k$ 为 S_k 的组合前沿. 那么它应该是问题 (1) 对于 n 代以 k 的解. 因此，由 k 代替 n 的 (2), $\overline{w}_1,\cdots,\overline{w}_k$ 以及 Lagrange 乘子 λ_{k1} 和 λ_{k2} 必须满足下列线性方程组：

$$\overline{w}_1+\overline{w}_2+\cdots+\overline{w}_k=1,\qquad \overline{w}_1\mu_1+\overline{w}_2\mu_2+\cdots+w_k\mu_k=\overline{\mu},$$
$$V_{11}\overline{w}_1+V_{12}\overline{w}_2+\cdots+V_{1k}\overline{w}_k-\frac{1}{2}\lambda_{k1}\mu_1-\frac{1}{2}\lambda_{k2}=0,$$

$$V_{21}\overline{w}_1 + V_{22}\overline{w}_2 + \cdots + V_{2k}\overline{w}_k - \frac{1}{2}\lambda_{k1}\mu_2 - \frac{1}{2}\lambda_{k2} = 0,$$
$$\vdots$$
$$V_{k1}\overline{w}_1 + V_{k2}\overline{w}_2 + \cdots + V_{kk}\overline{w}_k - \frac{1}{2}\lambda_{k1}\mu_k - \frac{1}{2}\lambda_{k2} = 0.$$

如果 S_k 是 S_n 的有效子集，那么 S_k 的组合前沿恒同于 S_n 的组合前沿. 于是 $\overline{w} = (\overline{w}_1,\cdots,\overline{w}_k,0,\cdots,0)^T \in W$ 是 (1) 的解. 因此，由 (2), $\overline{w}_1,\cdots,\overline{w}_k$ 以及 Lagrange 乘子 λ_1 和 λ_2 必须满足下列线性方程组：

$$\begin{aligned}
&\overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \cdots + \overline{w}_k = 1, \qquad \overline{w}_1\mu_1 + \overline{w}_2\mu_2 + \cdots + w_k\mu_k = \overline{\mu},\\
&V_{11}\overline{w}_1 + V_{12}\overline{w}_2 + \cdots + V_{1k}\overline{w}_k - \frac{1}{2}\lambda_1\mu_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0,\\
&V_{21}\overline{w}_1 + V_{22}\overline{w}_2 + \cdots + V_{2k}\overline{w}_k - \frac{1}{2}\lambda_1\mu_2 - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0,\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&V_{k1}\overline{w}_1 + V_{k2}\overline{w}_2 + \cdots + V_{kk}\overline{w}_k - \frac{1}{2}\lambda_1\mu_k - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0,\\
&V_{k+1,1}\overline{w}_1 + V_{k+1,2}\overline{w}_2 + \cdots + V_{k+1,k}\overline{w}_k - \frac{1}{2}\lambda_1\mu_{k+1} - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&V_{n1}\overline{w}_1 + V_{n2}\overline{w}_2 + \cdots + V_{nk}\overline{w}_k - \frac{1}{2}\lambda_1\mu_n - \frac{1}{2}\lambda_2 = 0.
\end{aligned}$$

不妨设 S_k 的有效前沿不是单点集 (否则，所有 μ_i 都相等，这时可通过去除第三个方程以及 λ_{k1} 和 λ_1 与下面一样讨论). 于是可设例如 $\mu_1 \neq \mu_2$. 由此通过比较两个方程组的第三个和第四个方程，立即可得 $\lambda_{k1} = \lambda_1$, $\lambda_{k2} = \lambda_2$. 这就是说，第一个方程组的解总是第二个方程组的解. 同时，由于 μ 可取任意值，在这两个方程组中都可把第二个方程去掉，仍保持原有的性质. 因此，这仅当

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rank}\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1\\
V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1k} & \mu_1 & 1 & 0\\
V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2k} & \mu_2 & 1 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
V_{k1} & V_{k2} & \cdots & V_{kk} & \mu_k & 1 & 0
\end{pmatrix},\\
&=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1\\
V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1k} & \mu_1 & 1 & 0\\
V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2k} & \mu_2 & 1 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
V_{k1} & V_{k2} & \cdots & V_{kk} & \mu_k & 1 & 0\\
V_{k+1,1} & V_{k+1,2} & \cdots & V_{k+1,k} & \mu_{k+1} & 1 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
V_{n1} & V_{n2} & \cdots & V_{nk} & \mu_n & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

时才有可能，它显然等价于 (5).

充分性 如果 (5) 成立，那么 (6) 也成立. 注意到 $\overline{\mu}$ 可取任意值，它说明必要性证明中的两个线性方程组有同样的解空间. 尤其是 S_k 的前沿组合一定是 S_n 的前沿组合.

推论 设随机变量 r_1 和 r_2 分别为两种风险证券的收益率. 那么第 1 种证券是这两种证券的集合的有效子集的充要条件为

$$E[r_1] = E[r_2], \qquad \mathrm{Cov}\,[r_1, r_2] = \mathrm{Var}\,[r_1]. \tag{7}$$

注 这一定理的证明中对证券集的收益率协方差矩阵是否正定没有作任何假定. 因此，它既适用于不带无风险证券情形，也适用于带无风险证券情形. 在 V 正定时，容易由此得到更确切的表达式. 它们就是 [4] 和 [5] 中讨论的情形. 由条件 (6) 有可能导出有效子集的一种检验算法. 这将在另文中讨论.

把定理 3.1 与二基金分离定理 2.2 结合起来，那么我们就可得到下列有趣的结果：

定理 3.2 设 S_n 为 n 种证券的集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$, 组合 w_p 和 w_q 分别是均值 - 方差组合选择问题 (1) 对于期望收益率 $\overline{\mu}$ 为 μ_p 和 μ_q 的解，并且 $\mu_p \neq \mu_q$. 它们所对应的收益率分别是 r_{w_p} 和 r_{w_q}. 那么任何收益率为 r' 的证券 u 不改变 S_n 的有效前沿的充分必要条件为存在 $w \in \mathbb{R}$, 使得

$$E\,[r'] = (1 - w)\,E\,[r_{w_p}] + w\,E\,[r_{w_q}], \tag{8}$$

$$\begin{cases} \mathrm{Cov}\,[r', r_{w_p}] = (1 - w)\,\mathrm{Var}\,[r_{w_p}] + w\,\mathrm{Cov}\,[r_{w_p}, r_{w_q}], \\ \mathrm{Cov}\,[r', r_{w_q}] = (1 - w)\,\mathrm{Cov}\,[r_{w_p}, r_{w_q}] + w\,\mathrm{Var}\,[r_{w_q}]. \end{cases} \tag{9}$$

特别是，如果 $\mathrm{Cov}[r_{w_p}, r_{w_q}] = 0$, 那么收益率为 r' 的证券 u 不改变 S_n 的有效前沿的充分必要条件为下列 "零 βCAPM" 成立：

$$E[r'] - E[r_{w_q}] = \beta'_{r'q}\big(E[r_{w_p}] - E[r_{w_q}]\big),$$
$$\beta'_{r'q} = \mathrm{Cov}\,[r', r_{w_p}]/\mathrm{Var}\,[r_{w_p}] = 1 - \mathrm{Cov}\,[r', r_{w_q}]/\mathrm{Var}\,[r_{w_q}].$$

如果收益率为常数 μ_0 的无风险资产与收益率为 r_m 的风险资产都为 S_n 的有效组合，那么充要条件为下列 CAPM 成立

$$E[r'] - \mu_0 = \beta'_{r'm}\big(E[r_m] - \mu_0\big), \qquad \beta'_{r'm} = \mathrm{Cov}\,[r', r_m]/\mathrm{Var}\,[r_m].$$

证 事实上，我们假设有收益率为 r_{w_p} 和 r_{w_q} 的两种证券，并把它们编号为 $n+1$ 和 $n+2$. 那么由定理 2.2, S_n 与这两种证券的并集 S_{n+2} 以 $\widehat{S}_2 = \{n+1, n+2\}$ 为有效子集，且仍然与 S_n 有同样的组合前沿. 再把收益率为 r' 的证券 u 加入 S_{n+2}, 形成新证券集. 于是如果 u 不改变 S_n 的组合前沿，那么 $\widehat{S}_2$ 仍然是新证券集的有效子集. $\widehat{S}_2$ 中的两种证券的收益率协方差矩阵显然正定. 由定理 3.1,

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \mathrm{Var}\,[r_{w_p}] & \mathrm{Cov}\,[r_{w_p}, r_{w_q}] & E\,[r_{w_p}] & 1 \\ \mathrm{Cov}\,[r_{w_p}, r_{w_q}] & \mathrm{Var}\,[r_{w_q}] & E\,[r_{w_q}] & 1 \\ \mathrm{Cov}\,[r', r_{w_p}] & \mathrm{Cov}\,[r', r_{w_q}] & E\,[r'] & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

它等价于存在 $w \in \mathbb{R}$, 使条件 (8), (9) 成立. 反之，如果不存在这样的 w, 那么同样由定理 3.1, S'_2 不再是新证券集的有效子集，而这只可能是证券 u 改变了 S'_2 生成的组合前沿. 定理的后半部分是前半部分的直接推论.

注 Rothschild 和 Stigliz[9,10] 为随机收益率定义了这样的半序关系：

$$r_a \succeq r_b \Longleftrightarrow r_b = r_a + \varepsilon, \qquad E\,[\varepsilon \,|\, r_a] = 0.$$

这一定义有多种等价叙述 (参看 [6-8, 12] 等). 对于这一半序关系, 同样可以定义 S_n 的 Rothschild-Stigliz 风险度量意义下 (以下简称: RS 意义下) 的有效组合前沿和有效子集 (常用的术语是 "k 基金分离"). 不难看出, RS 意义下的有效前沿一定是 Markowitz 意义下的有效前沿. 从而 Markowitz 意义下的有效子集一定是 RS 意义下的有效子集.

设第 0 种证券为收益率是常数 μ_0 的无风险证券, $S'_n=\{0,1,\cdots,n\}$, $S'_k=\{0,1,\cdots,k\}$. 那么 Ross[6] 指出 (叙述上经过 Merton[7,8] 的简化), S'_k 是 S'_n 的 RS 意义下的有效子集的充要条件为: 对于任何 $i\in S_n$, 存在系数 u_{ij}, 使得对于任何 RS 意义下的有效组合的收益率 $r_K=\sum\limits_{i=1}^{n}w_i^Kr_i$, 有

$$r_i-\mu_0=\sum_{j=1}^{k}u_{ij}(r_j-\mu_0)+\varepsilon_i,\qquad E\Big[\varepsilon_i\,\Big|\,\sum_{j=1}^{k}\delta_j^Kr_j\Big]=0,$$

其中

$$\delta_j^K=\sum_{i=1}^{n}u_{ij}w_i^K,\qquad j=1,\cdots,k.$$

由上所述, 这一条件应该也是 "S'_k 为 S'_n 的 Markowitz 意义下的有效子集" 的充分条件. 我们也不难直接证明这点. 但是与我们的条件的联系似还不明显.

另一方面, 条件

$$E\left[\varepsilon_i\,|\,r_1,\cdots,r_k\right]=0,\qquad i=k+1,\cdots,n; \tag{10}$$

可导出上述条件, 但已知它不是必要条件 [8], 除非 S'_k 中的证券都是 RS 意义下的有效组合. 这时它能立即导出我们的条件. 这是因为在上述表示下, 对于 S'_n 和 S'_k 的条件 (5) 也可表达为

$$\operatorname{Cov}\left[\varepsilon_i,r_j\right]=0,\qquad i=k+1,\cdots,n;\ \ j=1,\cdots,k.$$

它显然是 (10) 的推论. 当 $k=1$, 并且 S'_1 中的证券是 RS 意义下的有效组合时, CAPM 型的公式将是 S'_1 为 S'_n 在 RS 意义下的有效子集的必要条件 (参看 [3] 等), 但它却是 Markowitz 意义下的有效子集的充要条件.

4 主要定理的经济含义

定理 3.1 中的条件是用证券收益率的协方差、期望值来表示的. 它的经济含义不十分明显. 这一节中我们将用证券的价格来给出条件 (5) 的等价形式, 使定理条件更容易理解.

假定有当前和未来两个时刻, 当前是确定的, 但未来是不确定的. 假定市场中有 n 种基本证券, 其未来价格是 n 个随机变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 而证券的当前价格则由某个定义在未来价格集合上的数值函数 p 来决定, 即这 n 种证券的当前价格为 $p(x_1),p(x_2),\cdots,p(x_n)\neq 0$. 这 n 种证券的组合可用 n 维向量 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)^T\in\mathbb{R}^n$ 来表示, 而投资组合的未来价格为

$$x_\theta=\theta^Tx=\theta_1x_1+\theta_2x_2+\cdots+\theta_nx_n. \tag{11}$$

其当前价格则为 $p(x_\theta)=p(\theta_1x_1+\theta_2x_2+\cdots+\theta_nx_n)$.

按照 Jarrow[14], 我们提出下列

无套利假设:

1) 对于任何组合 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)^T\in\mathbb{R}^n$,

$$p(\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n)=\theta_1p(x_1)+\cdots+\theta_np(x_n);$$

2) 如果 $\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n$ 是非负随机变量, 且其取正值的概率大于零, 那么 $\theta_1p(x_1)+\cdots+\theta_np(x_n)>0$.

这里第一个条件为 p 是线性函数. 其含义在于: 如果线性性的两端不等, 那么通过买卖整个组合与买卖组合的成分就能获得套利. 第二个条件是指未来有价值的组合的当前价值大于零. 许多文献中常常认为第一个条件理所当然, 而不把它当作无套利假设的要求, 使得无套利假设就只指第二个条件, 并由此导得资产定价基本定理. 在我们的讨论中并不需要第二个条件. 但第一个条件是不可少的.

正如我们在上节中已经提到, Markowitz 理论并不要求无套利假设. 然而, 如果我们承认无套利假设 1), 那么 Markowitz 的理论框架将更为自然. 事实上, 利用定价函数 p, 当 $p(x_\theta)\neq 0$ 时, 我们由此可得到该证券组合 θ 的收益率 r_θ 为

$$\begin{aligned}r_\theta=&\frac{x_\theta-p(x_\theta)}{p(x_\theta)}=\frac{\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n-p(\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n)}{p(\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n)}\\=&\frac{\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n-\theta_1p(x_1)-\cdots-\theta_np(x_n)}{\theta_1p(x_1)+\cdots+\theta_np(x_n)}\\=&w_1r_1+\cdots+w_nr_n,\end{aligned}\tag{12}$$

其中

$$r_i=\frac{x_i-p(x_i)}{p(x_i)},\qquad i=1,2,\cdots,n;$$

它们是各基本证券的收益率;

$$w_i=\frac{\theta_ip(x_i)}{\theta_1p(x_1)+\theta_2p(x_2)+\cdots+\theta_np(x_n)},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

注意到分母是该证券组合的当前价值, 故 w_i 是组合中第 i 种证券的当前价值在其中所占的比例. 尤其是

$$w_1+w_2+\cdots+w_n=1.\tag{13}$$

这正是 Markowitz 理论中所必须的. 注意到对于任何 $(\theta_1,\cdots,\theta_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 当 $\theta_1p(x_1)+\cdots+\theta_np(x_n)\neq 0$ 时, 存在唯一的 $(w_1,\cdots,w_n)^T\in\mathbb{R}^n$, $w_1+w_2+\cdots+w_n=1$, 使得 $r_\theta=w_1r_1+\cdots+w_nr_n$; 反之, 对于任何 $r_w=w_1r_1+\cdots+w_nr_n$, $w_1+\cdots+w_n=1$, 可令 $\theta_i=\lambda w_i/p(x_i)$, $i=1,2,\cdots,n$, $\lambda>0$, 从而有 $x_\theta=\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n$, 满足 $r_\theta=r_w$. 于是, 可以建立从

$$\{(\theta_1,\cdots,\theta_n)^T\in\mathbb{R}^n\mid\theta_1p(x_1)+\cdots+\theta_np(x_n)\neq 0\}$$

到

$$\{(w_1,\cdots,w_n)^T\in\mathbb{R}^n\mid w_1+\cdots+w_n=1\}$$

的满射. 尤其是, 我们还可选择满足 $p(x_\theta)=1$ 的 θ 来对应 w. 这样就可将 Markowitz 理论中对收益率的讨论转为对证券未来价格的讨论.

对于证券组合未来价格 x, 当 $p(x)\neq 0$ 时, 定义 $r=r(x)=(x-p(x))/p(x)$, 那么可以看出 r 是 x 的零次齐次函数, 即对于任何 $\lambda>0$, 有 $r(\lambda x)=r(x)$. 这说明两种未来价格成比例的证券的收益率是一样的. 尤其是所有无风险资产的收益率是一样的.

收益率之间的协方差也可以用未来价格来表示. 事实上,

$$\mathrm{Con}\,[r_i,r_j]=\frac{\mathrm{Cov}\,[x_i-p(x_i),\,x_j-p(x_j)]}{p(x_i)p(x_j)}=\frac{\mathrm{Cov}\,[x_i,x_j]}{p(x_i)p(x_j)}. \tag{14}$$

这一等式以后我们将多次用到. 如果我们假定

$$V=(V_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,n}=\big(\mathrm{Cov}\,[r_i,r_j]\big)_{i,j=1,2,\cdots,n}.$$

正定, 令

$$U=(U_{ij})_{i,j=1,2,\cdots,n}=\big(\mathrm{Cov}\,[x_i,x_j]\big)_{i,j=1,2,\cdots,n}.$$

那么由 (14) 可得

$$|V|=\frac{|U|}{\prod\limits_{i=1}^{n}p^2(x_i)}>0,$$

即 (半正定) 的 U 也正定. 反之亦然. 这时, 各证券未来价格之间将线性无关, 并且其任何组合都不是无风险资产.

定理 4.1 设 S_n 为 n 种证券的集合 $\{1,2,\cdots,n\}$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为其相应的未来价格. $S_k=\{1,2,\cdots,k\}\subset S_n$. 那么 S_k 是 S_n 的有效子集的充分必要条件为对于任何 $i\in S_n$, 存在 θ_j^{ik}, $j=1,\cdots,k$, 使得 $x_i=\sum_{j=1}^{k}\theta_j^{ik}x_j+\varepsilon_i^k$, 并且 ε_i^k 满足

$$\mathrm{Cov}\,[x_j,\varepsilon_i^k]=0,\qquad j=1,\cdots,k, \tag{15}$$

有

$$p(\varepsilon_i^k)=0,\qquad E[\varepsilon_i^k]=0. \tag{16}$$

证 我们只需证明定理 4.1 的条件与 (5) 等价. 为此我们先注意到 (5) 等价于下列条件:

对于任何 $i\in S_n$, 存在 $w^{ik}=(w_1^{ik},\cdots,w_k^{ik})^T\in W^k$, 使得

$$E\,[r_i]=(w^{ik})^TE\,[r^k]=w_1^{ik}E\,[r_1]+w_2^{ik}E\,[r_2]+\cdots+w_k^{ik}E\,[r_k], \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,[r_i,r_j]=&(w^{ik})^T\mathrm{Cov}\,[r^k,r_j]\\=&w_1^{ik}\mathrm{Cov}\,[r_1,r_j]+w_2^{ik}\mathrm{Cov}\,[r_2,r_j]+\cdots+w_k^{ik}\mathrm{Cov}\,[r_k,r_j],\\&j=1,2,\cdots,k.\end{aligned} \tag{18}$$

设 (17), (18) 成立, 则由 (17) 可得

$$E\big[x_i/p(x_i)\big]=w_1^{ik}E\big[x_1/p(x_1)\big]+w_2^{ik}E\big[x_2/p(x_2)\big]+\cdots+w_k^{ik}E\big[x_k/p(x_k)\big].$$

令 $\theta_j^{ik}=w_j^{ik}p(x_i)/p(x_j)$, $j=1,\cdots,k$, 并设

$$x_i=\theta_1^{ik}x_1+\cdots+\theta_k^{ik}x_k+\varepsilon_i^k,$$

则 $E\,[\varepsilon_i^k]=0$. 另一方面, 由 (18), 对于任何 $j=1,2,\cdots,k$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,[\varepsilon_i^k,x_j]=&\mathrm{Cov}\,[x_i,x_j]-\theta_1^{ik}\mathrm{Cov}\,[x_1,x_j]-\cdots-\theta_k^{ik}\mathrm{Cov}\,[x_k,x_j]\\=&p(x_i)p(x_j)\mathrm{Cov}\,[r_i,r_j]-\theta_1^{ik}p(x_1)p(x_j)\mathrm{Cov}\,[r_1,r_j]\\&-\cdots-\theta_k^{ik}p(x_k)p(x_j)\mathrm{Cov}\,[r_k,r_j]\\=&p(x_i)p(x_j)\big(\mathrm{Cov}\,[r_i,r_j]-w_1^{ik}\mathrm{Cov}\,[r_1,r_j]-\cdots-w_k^{ik}\mathrm{Cov}\,[r_k,r_j]\big)\\=&0.\end{aligned}$$

从而 (15), (16) 成立.

反之, 设 (15) 和 (16) 成立. 那么不妨设 $i=k+1$, 我们有

$$x_{k+1}=\theta_1' x_1+\cdots+\theta_k' x_k+\varepsilon_{k+1}^k,$$

且

$$p(\varepsilon_{k+1}^k)=0, \qquad \mathrm{Cov}\,[x_j,\varepsilon_{k+1}^k]=0, \qquad j=1,\cdots,k.$$

从而

$$E\,[x_{k+1}]=\theta_1' E[x_1]+\cdots+\theta_k' E[x_k], \qquad p(x_{k+1})=\theta_1' p(x_1)+\cdots+\theta_k' p(x_k).$$

因此,

$$\begin{aligned}E\,[r_{k+1}]&=\frac{E[x_{k+1}]-p(x_{k+1})}{p(x_{k+1})}\\&=\frac{\theta_1' E[x_1]+\cdots+\theta_k' E[x_k]-\theta_1' p(x_1)-\cdots-\theta_k' p(x_k)}{\theta_1' p(x_1)+\cdots+\theta_k' p(x_k)}\\&=w_1' E[r_1]+\cdots+w_k' E[r_k],\end{aligned}$$

其中

$$w_j'=\frac{\theta_j' p(x_j)}{\theta_1' p(x_1)+\cdots+\theta_k' p(x_k)}, \qquad j=1,\cdots,k.$$

即 (17) 成立. 另一方面,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,[r_{k+1},r_j]&=\frac{\mathrm{Cov}\,[x_{k+1},x_j]}{p(x_{k+1})p(x_j)}=\frac{\theta_1'\mathrm{Cov}\,[x_1,x_j]+\cdots+\theta_k'\mathrm{Cov}\,[x_k,x_j]}{p(x_{k+1})p(x_j)}\\&=w_1'\mathrm{Cov}\,[r_1,r_j]+\cdots+w_k'\mathrm{Cov}\,[r_k,r_j].\end{aligned}$$

即 (18) 成立.

这一定理的条件说明, S_n 中的证券的未来价格除去与 S_k 中的相关部分外, 余下部分的当前价格为零, 未来价格的期望值也为零, 从而不可能为有效前沿作贡献.

4 结语

本文在 Markowitz 的均值 - 方差分析的框架下提出了一个证券集的有效子集的概念. 这一概念的出发点是试图在证券选择的均值 - 方差分析计算中提出一种剔除冗余证券的准则. 以前曾以不同的术语在证券集的收益率协方差矩阵正定的条件下, 在 Szegö, Huberman-Kandel 等人的工作中讨论过. 在理论上其含义相当于在均值 - 方差意义下的 k 基金分离. 本文得到了一个证券集的子集为有效子集的很一般的充要条件. 这一结果与 Ross 的 k 基金分离定理很相似, 但由于有效性的定义不同, 所得结果自然也不同. 特别是在二基金分离情形, CAPM 型公式的成立将就是我们的充要条件. 同时, 我们的结果是用均值和协方差来刻划的, 而不是用条件期望来刻划的. 因此, 它有可能用来进行实际计算. 本文的进一步研究将是搜索有效子集的算法和有效子集计算的稳定性.

致谢 本文的初步结果曾在北京大学金融数学与金融工程研究中心和南开数学研究所报告, 并与许多同事和同学经过有益的讨论. 尤其是本文结果与 CAPM 型公式的联系是唐国正博士首先发现的. 特此致谢.

参 考 文 献

1 Markowitz H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*, 1952, 7: 77–91
2 Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. Cambridge: Basil Blackwell, 1959, 1991 Second ed.
3 Michaud R O. Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation. Boston: Havard Business School Press, 1998
4 Szegö G P. Portfolio Theory, with Application to Bank Asset Management. New York: Acad. Press, 1980
5 Huberman G, Kandel S. Mean-variance Spanning. *Journal of Finance*, 1987, 42: 873–888
6 Ross S. Mutual Fund Separation in Financial Theory: The Separating Distributions. *Journal of Economic Theory*, 1978, 17: 254–286
7 Merton R C. On the Microeconomic Theory of Investment under Uncertainty. In: Arrow K J, Intriligator M, eds., Handbook of Mathematical Economics, Vol. II, Amsterdam: North-Holland, 1982, 601–609
8 Merton R C. Continuous-Time Finance, Rev. ed. Oxford: Blackwell, 1992
9 Rothschild M, Stiglitz J E. Increasing Risk I: A Definition. *Journal of Economic Theory,* 1970, 2: 225–243
10 Rothschild M, Stiglitz J E. Increasing Risk II: Its Economic Consequences. *Journal of Economic Theory,* 1971, 3: 66–84
11 Rockafellar R T. Convex Analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970
12 Huang Chi-fu, Litzenberger R H. Foundations for Financial Economics. New Jersy: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988
13 Constantinides G M, Malliaris A G. Portfolio Theory. In: R. Jarrow A, Maksimovic V, Ziemba W T eds., Amsterdam: Finance, Elsevier, 1995, 1–30
14 Jarrow R A. Finance Theory. New Jersy: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988.

EFFICIENT SUBSET FOR PORTFOLIO SELECTION

SHI SHUZHONG

(*Research Center for Financial Mathematics and Engineering, Peking University, Beijing* 1000871)

(*Nankai Institute of Mathematics, Tianjin* 300071)

YANG JIE

(*Nankai Institute of Mathematics, Tianjin* 300071)

Abstract This paper introduces a concept of efficient subset for portfolio selection. An efficient subset may replace the original security set to generate the Markowitz portfolio efficient frontier. A necessary and sufficient condition for a subset to be efficient is obtained. Theorically, this is a new k-fund separation theorem; practically, the theorem could decrease the computational time for calculating the portfolio efficient frontier.

Key words Markowitz portfolio selection theory, mean-variance analysis, efficient portfolio frontier, efficient subset