第 18 卷第 1 期 经 济 数 学 Vol 18 No. 1
2001 年 3 月 MATHEMATICS IN ECONOMICS Mar. 2001

证券集的组合前沿分类与有效子集*

杨 杰
(南开数学研究所, 天津, 300071)
史树中
(北京大学金融数学与金融工程研究中心, 北京, 100871; 南开数学研究所, 天津, 300071)

摘 要 本文通过引入证券价格, 讨论一般证券集组合前沿的分类, 并据此直接证明判定某个证券子集是全集的有效子集的一个充要条件.

关键词 组合选择理论, 有效子集, 组合前沿

1. 引言

在前一篇文章[9]里, 我们引入了证券组合选择的有效子集的概念, 目的是使在进行 Markowitz 均值-方差型证券组合选择时, 只需在全体证券的一个子集(即我们所说的"有效子集")中进行选择. 有关 Markowitz 组合选择理论可参见 Constantinides & Malliaris [1]、Hhang & Litzenberger [2]、Jarrow [4]等. 在证券允许卖空时, 有效子集定义如下:

记 S_n 是 n 种证券的集合, 这 n 种证券的收益率存在, 且被认为是方差有限的随机变量, 分别用 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 表示; S_k 为其中 $k\,(k\leq n)$ 种证券的子集, 不妨设其收益率就对应 $r_1, \cdots, r_k$, 称 S_k 是 S_n 的有效子集是指:

任给 $(w_1, w_2, \cdots, w_n)^T \in R^n, w_1+w_2+\cdots+w_n=1$, 存在 $(w_1', \cdots, w_k')^T \in R^k, w_1'+\cdots+w_k'=1$, 使得

$$E[w_1r_1+w_2r_2+\cdots+w_nr_n] \leq E[w_1'r_1+\cdots+w_k'r_k],$$
$$\mathrm{Var}[w_1r_1+w_2r_2+\cdots+w_nr_n] \geq \mathrm{Var}[w_1'r_1+\cdots+w_k'r_k].$$

这里 $E[\cdot]$表示随机变量的期望, $\mathrm{Var}[\cdot]$表示随机变量的方差.

在文章[9]中, 我们利用 Lagrange 乘子, 导出了判定有效子集的一个矩阵形式的充要条件, 进而联系无套利假设推导出一个利用证券价格表述的判定条件. 后者具有明显的经济意义. 在本文中, 我们将从证券价格出发, 直接证明该判定条件(第四节), 进一步揭示其经济意义. 作为证明的先导, 本文还给出一般证券集的组合前沿的分类, 突出套利组合在生成组合前沿时的作用(第三节). 同文章[9]相同, 本文假定证券允许卖空, 但不假定传统组合分析理论中收益率协方差矩阵的正定性. 同时, 还通过引入证券价格(第二节), 把传统理论框架所忽视的一些情形包含进来.

2 证券价格与无风险组合

先引入一些本文通用的记号. 记 S_n 为 n 种证券的集合. 对证券作出编号, 那么 S_n 就是编

* 本文的研究得到国家自然科学基金委员会重大项目《金融数学、金融工程与金融管理》的资助.
收稿日期: 2000- 10- 31

号的集合$\{1, 2, \cdots, n\}$. 除非特别声明, 本文假定这 n 种证券的收益率存在且为方差有限的随机变量, 它们分别以 $r_1, r_2, , r_n$ 表示. 记

$$\mu_i = E[r_i], i = 1, 2, \cdots, n; \quad V = (\mathrm{Cov}[r_i, r_j])_{i, j = 1, 2, \cdots, n}.$$

这里 $Cov[\cdot, \cdot]$表示协方差. 本文假定证券许卖空. 这样, *Markowitz* 的均值-方差型组合选择问题就可表示为

$$\begin{cases} \min & \sigma_w^2 := w^T V w \\ \text{s. t.} & w = (w_1, \cdots, w_n)^T \in R^n \\ & w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1 \\ & w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + \cdots + w_n\mu_n = \overline{\mu} \end{cases} \tag{1}$$

这里 $\overline{\mu} \in R$ 为预先设定的期望收益率水平.

证券或其组合的收益率定义为 $r = (P_1 - P_0)/(P_0)$, 这里 P_0 为证券或其组合当前时点的价格, P_1 为其未来时点的价格, 隐含条件为 $P_0 \neq 0$. 更确切地说, P_1 应该是"未来收益", 其中包括未来价格以及分红派息之类的其他收益. 但为了便于行文, 仍称为未来价格. 于是, 我们可以引入证券的价格, 把对证券收益率的讨论转为对证券价格的讨论. 具体如下: 假设有"当前"和"未来"两个时刻, 当前是确定的, 但未来是不确定的; 市场上 n 种证券的当前价格是 n 个常数, 分别记为 $p_1, \cdots, p_n$; 一般假定它们非零. 未来价格是 n 个方差有限的随机变量, 分别用 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 来表示. 由收益率的定义知, $r_i = (x_i - p_i)/p_i$. 这 n 种证券的投资组合可用 n 维向量 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n)^T \in R^n$ 来表示, 该组合的未来价格 $x_\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i x_i$, 当前价格 $p_\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i p_i$. 这里我们仅假定组合的价格由其组成部分的价格来决定, 但不要求未来价格与当前价格之间有函数关系. 因此, 它比通常的无套利假设(参看例如 *Jarrow* [4])要弱得多. 当 $\sum_{i=1}^n \theta_i p_i \neq 0$ 时, 该投资组合的收益率

$$\begin{aligned} r_\theta &= \frac{x_\theta - p_\theta}{p_\theta} = \frac{\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_n x_n - (\theta_1 p_1 + \cdots + \theta_n p_n)}{\theta_1 p_1 + \cdots + \theta_n p_n} \\ &= w_1 r_1 + \cdots + w_n r_n \end{aligned}$$

其中 $w_i = \theta_i p_i/(\theta_1 p_1 + \cdots + \theta_n p_n)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 注意到上式中的分母是该证券组合的当前价格, 故 w_i 即组合中第 i 种证券的当前价值在总价值中所占的比例. 于是有 $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$. 这自然满足 *Markowitz* 理论的要求. 不妨称 $w = (w_1, \cdots, w_n)^T \in R^n$ 为"收益率组合", 以区别前面定义的证券组合. 由此我们可以建立从证券组合集合

$$\{(\theta_1, \cdots, \theta_n)^T \in R^n \mid \theta_1 p_1 + \cdots + \theta_n p_n \neq 0\}$$

到收益率组合集合

$$\{(w_1, \cdots, w_n)^T \in R^n \mid w_1 + \cdots + w_n = 1\}$$

的满射. 这样就可将 *Markowitz* 理论中对组合收益率的讨论转为对组合未来价格的讨论.

若记 $U = (Cov[x_i, x_j])_{i, j = 1, 2, \cdots, n}$, 由

$$\mathrm{Cov}[r_i, r_j] = \frac{\mathrm{Cov}[x_i - p_i, x_j - p_j]}{p_i p_j} = \frac{\mathrm{Cov}[x_i, x_j]}{p_i p_j} = \frac{\mathrm{Cov}[x_i, x_j]}{p_i p_j} \tag{2}$$

可得 $|V| = |U| / \prod_{i=1}^n p_i^2$, 这里 $|\cdot|$表示矩阵的行列式. 于是 V 正定等价于 U 正定. 这样, 在证券收益率均存在的情况下, 收益率协方差矩阵 V 正定与未来价格协方差矩阵 U 正定是等价的.

如果收益率协方差矩阵 V 非正定, 则必存在非零 n 维向量 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T \in R^n$, 使得

$\alpha^T V\alpha = Var[\sum_{i=1}^n \alpha_i r_i] = 0$. 这里可能存在两种情况: 1) $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$; 这时, 令 $\overline{w}_i = \alpha_i / \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $i = 1, \cdots, n$. 那么 $\sum_{i=1}^n \overline{w}_i = 1$, 从而 $\sum_{i=1}^n \overline{w}_i r_i$ 是方差(风险)为零的收益率组合 $\overline{w} = (\overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_n)^T$ 的收益率. 这种组合是所谓无风险收益率组合. 2) $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$; 这时就不能如上形成一个无风险收益率组合. 但是如果用未来价格协方差矩阵 U 来考虑, 我们仍能发现它意味着某种特殊组合的存在. 事实上, 由(2)可得

$$Var\Big[\sum_{i=1}^n \alpha_i r_i\Big] = Var\Big[\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{p_i} x_i\Big] = 0.$$

令 $\beta_i = \alpha_i / p_i$, $i = 1, \cdots, n$. 那么有

$$\sum_{i=1}^n \beta_i p_i = 0, \quad Var\Big[\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\Big] = 0.$$

这就是说用 n 维向量 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)^T$ 表示的对未来价格而言的证券组合, 其当前价格为零, 未来价格的方差为零. 这种证券组合的收益率无法定义. 尤其是在未来价格非零的情况下, 它其实是一种套利组合, 因为它可以通过不花费用的买入或卖空而在未来肯定获得. 用同样的方法讨论前一种情况, 我们容易看到, 前一种情形相当于当前价格非零, 未来价格方差为零的情形. 为了叙述方便, 我们给出下列定义.

定义 2.1　称一种组合(或证券本身)为无风险组合(或证券), 是指其未来价格方差为零.

定义 2.2　称无风险组合 $\theta^{I} = (\theta_1^{I}, \cdots, \theta_n^{I})^T \in R^n$ 为 I 型组合, 是指其当前价格为零, 即 $\sum_{i=1}^n \theta_i^{I} p_i = 0$, 但其未来价格为非零定常数; 称无风险组合 $\theta^{II} = (\theta_1^{II}, \cdots, \theta_n^{II})^T \in R^n$ 为 II 型组合, 是指其当前价格非零, 即 $\sum_{i=1}^n \theta_i^{II} p_i \neq 0$.

定义 2.1 中的无风险组合比前面提到的"无风险收益率组合"的概念要广. 无风险收益率组合只相当于这里的 II 型组合, 但目前的无风险组合, 除了包括 I 型组合外, 还包括当前价格为零, 未来价格也为零(定常数)的"零组合". 对于一个证券集 S_n 来说, 如果其收益率或未来价格的协方差矩阵非正定, 那么它等价于存在无风险组合. 但是这时有四种可能: 或者只有 I 型组合; 或者只有 II 型组合; 或者两者都存在; 或者两者都不存在. 最后一种情形意味着只存在"零组合". 这些将成为我们以下对一般证券集的组合前沿分类的判据.

3. 一般证券集组合前沿的分类

对于任意给定的期望收益率水平 $\overline{\mu}$, 投资优化问题(1)的最优解显然都是存在的. 最优解所对应的投资组合收益率的标准差和均值在标准差-均值平面(以后简称 σ-μ 平面)上对应一个点. 所有这种点组成的点集在组合选择理论中被称为组合前沿. .

容易知道, 在允许卖空证券的情形, 我们对于有效子集的定义就等价于"子集的组合前沿恒同于全集的组合前沿".

传统的 Markowitz 组合分析理论关于组合前沿的结果可以总结发下:

引理 3.1　当 $\{\mu_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 不全相等并且收益率协方差矩阵 V 正定时, 证券集的组合前沿在 σ-μ 平面上为某双面线的右半支(见下图情形五), 它与 μ 轴无公共点; 当再附加一种收益率为定常数的无风险证券时, 组合前沿在 σ-μ 平面上为两条共端点但不重合的射线(见下图情形六), 其公共端点在 μ 轴上, 斜率存在且仅相差一个负号, 即它们关于一条平行于 σ 轴的直线对称.

借助于前面引进的证券价格, 我们下面可以考察任意证券集的组合前沿的形状分类. 先给出

以下引理.

引理 3.2　假设有 $k+1$ 种证券. 如果第 $k+1$ 种证券的当前价格和未来价格可以被前 k 种证券的当前价格和未来价格线性表示, 即存在 $\theta^{(k)}=(\theta_1^{(k)},\cdots,\theta_k^{(k)})^T\in R^k$, 使得

$$p_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{(k)}p_i;\quad x_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{(k)}x_i,\quad a.e.\ P.$$

这里 $a.e.\ P$ 指依概率相等, 那么所有这 $k+1$ 种证券的组合前沿等同于前 k 种证券的组合前沿.

注: 第 $k+1$ 种证券可称之为相对于前 k 种证券的冗余证券. 这一结果并不需要假定证券的当前价格非零.

证明　只需指出, 任给 $\theta^{k+1}=(\theta_1^{k+1},\cdots,\theta_{k+1}^{k+1})^T\in R^{k+1}$, $\sum_{i=1}^{k+1}\theta_i^{k+1}p_i\neq 0$, 一定存在 $\theta^k=(\theta_1^k,\cdots,\theta_k^k)^T\in R^k$, 满足 $\sum_{i=1}^{k}\theta_i^k p_i\neq 0$, 并使得组合 θ^{k+1} 与 θ^k 的收益率依概率相等.

事实上, 任给 $\theta^{k+1}=(\theta_1^{k+1},\cdots,\theta_{k+1}^{k+1})^T\in R^{k+1}$, $\sum_{i=1}^{k+1}\theta_i^{k+1}p_i\neq 0$, 令 $\theta_i^k=\theta_i^{k+1}+\theta_{k+1}^{k+1}\theta_i^{(k)}$, $i=1,\cdots,k$. 于是

$$\sum_{i=1}^{k}\theta_i^k p_i=\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{k+1}p_i+\theta_{k+1}^{k+1}\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{(k)}p_i=\sum_{i=1}^{k+1}\theta_i^{k+1}p_i\neq 0;$$

$$\sum_{i=1}^{k}\theta_i^k x_i=\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{k+1}x_i+\theta_{k+1}^{k+1}\sum_{i=1}^{k}\theta_i^{(k)}x_i=\sum_{i=1}^{k+1}\theta_i^{k+1}x_i,\ a.e.\ P.$$

这样组合 θ^{k+1} 与 θ^k 的收益率依概率相等.

下面我们可以给出一般证券集组合前沿的分类定理.

定理 3.3　如果对一般的证券集 S_n, 仅假定证券的当前价格均不为零, 从而其收益率都存在, 那么 S_n 的组合前沿在 σ-μ 平面上有且仅有以下六种类型:

1) 在所有证券的期望收益率均相等且不存在 Ⅱ 型组合时, 组合前沿退化为一个点(例如图中情形一的 A 点), 该点位于 μ 轴右方, 但不在 μ 轴上;

2) 在所有证券的期望收益率均相等且存在 Ⅱ 型组合时, 组合前沿退化为 μ 轴上的一个点(例如图中情形二的 B 点);

(以下四种情形, 均假定证券集的期望收益率不全相等.)

3) 在存在 Ⅰ 型组合、但不存在 Ⅱ 型组合时, 组合前沿为一条平行而不重合于 μ 轴的直线(见图中情形三), 且在 μ 轴右方;

4) 在既存在 Ⅰ 型组合、也存在 Ⅱ 型组合时, 组合前沿为 μ 轴(见图中情形四);

5) 在既不存在 Ⅰ 型组合、也不存在 Ⅱ 型组合时, 组合前沿为某双曲线的右半支(见图中情形五), 该曲线位于 μ 轴右方, 且与 μ 轴无公共点;

6) 在不存在 Ⅰ 型组合、但存在 Ⅱ 型组合时, 组合前沿为 μ 轴右方的两条共端点但不重合的射线, 其公共端点在 μ 轴上, 斜率存在且仅相差一个负号(见图中情形六).

证明　当存在一个常数 $\mu_0\in R$, 使得 $\mu_i=\mu_0$, $i=1,\cdots,n$ 时, 容易知道, 任意当前价格不为零的证券组合的期望收益率也等于 μ_0. 不难验证, 这时不可能存在 Ⅰ 型组合. 于是, 若存在 Ⅱ 型组合, 组合前沿在 σ-μ 平面上的图示就是 μ 轴上的一个点(如图中情形二所示); 若不存在 Ⅱ 型组合, 组合前沿的图示就是 μ 轴右方的一个点且不在 μ 轴上(如图中情形一所示).

以下均假定 $\{\mu_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 不全相等, 分四种情况讨论.

(1) 既不存在 Ⅰ 型组合, 也不存在 Ⅱ 型组合(或证券).

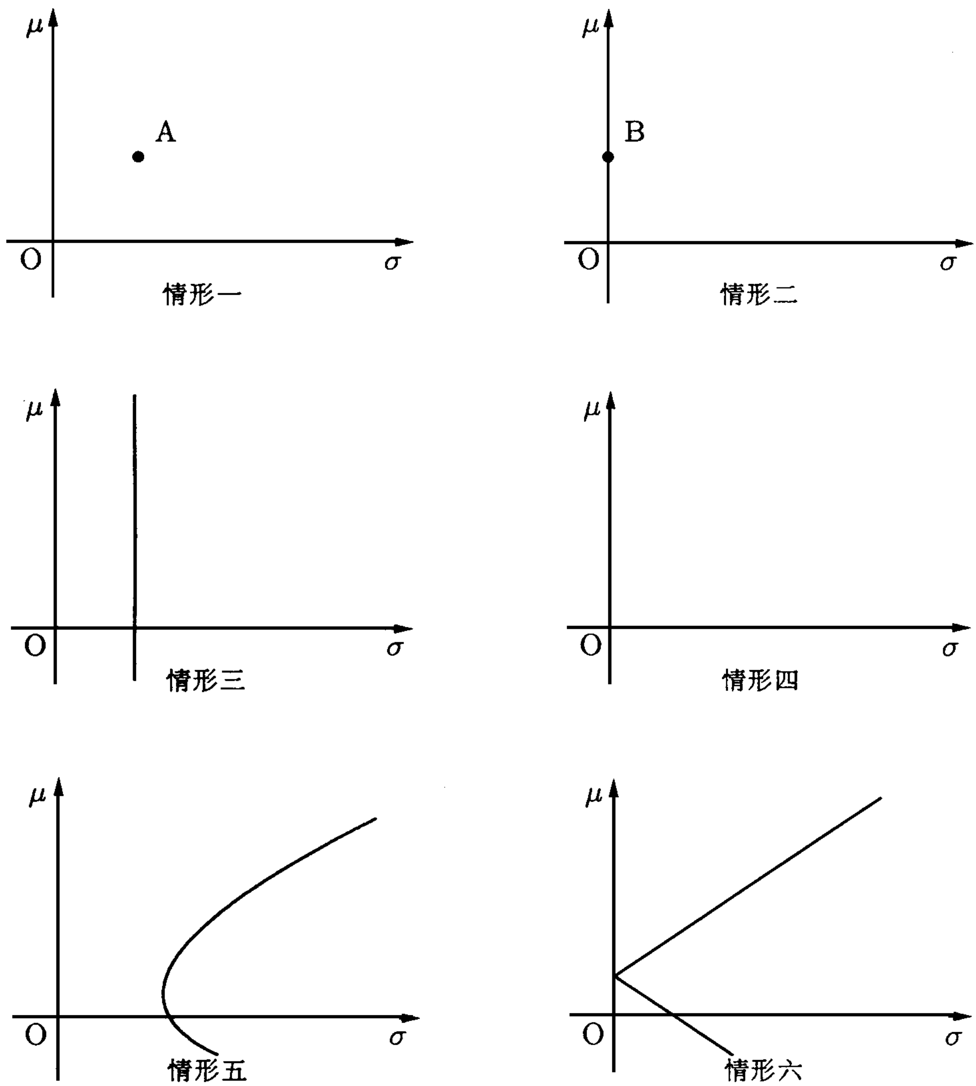

图　组合前沿在 σ-μ 平面上的分类

若 U 正定, 则 V 正定, 由引理 3.1 知, 组合前沿就如图中情形五所示; 若 U 非正定, 从而存在某个非零组合 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n)^T \in R^n$, 使得 $\mathrm{Var}[\sum_{i=1}^n \theta_i x_i] = 0$. 即它是无风险组合. 于是存在某种证券, 不妨就设是第 n 种证券, 以及常数 c_n 及组合 $\theta^{n-1} = (\theta_1^{n-1}, \cdots, \theta_{n-1}^{n-1})^T \in R^{n-1}$, 使得

$$x_n = c_n + \theta_1^{n-1} x_1 + \cdots + \theta_{n-1}^{n-1} x_{n-1}, \ a.e.\ P,$$

记常数 $a_n = p_n - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i^{n-1} p_i$, 于是组合 $(-\theta_1^{n-1}, \cdots, -\theta_{n-1}^{n-1}, 1)^T$ 的当前价格为 a_n, 未来价格为 c_n. 但是由于此时既不存在 Ⅰ 型组合, 也不存在 Ⅱ 型组合, 故一定有 $a_n = c_n = 0$. 由引理 3.2 知, 此时将第 n 种证券去掉并不改变证券集的组合前沿. 由此, 我们可以逐一去掉导致 U 不正定的冗余证券, 而不改变证券集的组合前沿. 由于 $\{\mu_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 不全相等, 这种去除过程会在剩余两种以上证券时中止, 此时剩余证券的协方差矩阵正定. 于是这种情形可最终归结为引理 3.1

的第一种情形, 即组合前沿如图中情形五所示.

(2) 存在Ⅱ型组合, 但不存在Ⅰ型组合.

这意味着如果存在两种以上不同的Ⅱ型组合, 那么它们相互之间有比例关系; 否则, 由两种互间不成比例的Ⅱ型组合可以张成一种Ⅰ型组合. 此时我们把一种Ⅱ型组合视为一种证券 $n+1$, 并添加到证券集中. 这一证券是一种收益率有限的无风险证券. 由引理 3.2 知, 这样做并不改变组合前沿. 记新证集为 S_n'. 由于存在Ⅱ型组合, S_n 的协方差矩阵一定非正定. 所以, S_n 中存在一种证券, 不妨仍设为是第 n 种证券, 与上面一样讨论, 得到类似的

$$x_n = c_n + \theta_1^{n-1} x_1 + \cdots + \theta_{n-1}^{n-1} x_{n-1}, \quad a.e.\ P,$$

$a_n = p_n - \sum_{i=1}^{n-1} \theta_i^{n-1} p_i$, 于是组合 $(-\theta_1^{n-1}, \cdots, -\theta_{n-1}^{n-1}, 1)^T$ 的当前价格为 a_n, 未来价格为 c_n. 如果这里的 a_n 与 c_n 仍然都为零, 那么它仍然是 S_n 的冗余证券. 但是现在它们可以不为零. 这时当前价格为 $a_n \neq 0$、未来价格为 c_n 的证券组合将是某种Ⅱ型组合的常数倍, 尤其是第 $n+1$ 种证券的常数倍. 因此, 这第 n 种证券将是 S_n' 中的冗余证券, 仍可以去除而不改变组合前沿. 依此类推, 我们可以不断在 S_n 中去除对 S_n' 而言的冗余证券, 直到 S_n 中余下的证券的协方差矩阵正定. 于是本情形可以归结为引理 3.1 中的第二种情形, 即本情形对应于图中的情形六.

(3) 既存在Ⅱ型组合, 也存在Ⅰ型组合.

注意到一种Ⅱ型组合与一定比例的Ⅰ型组合再组合可以得到任意收益率的无风险组合, 因此组合前沿的形状就如图中情形四那样, 即 μ 轴.

(4) 存在Ⅰ型组合, 但不存在Ⅱ型组合.

注意到, 存在Ⅰ型组合意味着存在一种当前价格为零, 未来价格为定常数 1 的证券组合 θ^{I}, 而任何其他的Ⅰ型组合都可以认为是该证券组合的常数倍, 因此我们可以依照(2) 的方法, 把组合 θ^{I} 加入到证券集中, 利用去除过程可以在不改变组合前沿的前提下, 使得剩余的非 θ^{I} 的证券的协方差矩阵正定, 从而在这些证券构成的组合中存在收益率方差最小(且不为零) 的组合. 记该最小方差组合为 $\theta^{(4)}$, 其未来价格的方差与当前价格当然都不为零. 容易知道 $\theta^{(4)} + \lambda\theta^{\mathrm{I}}$ (λ 为任意常数) 的当前价格即为组合 $\theta^{(4)}$ 的当前价格, 其未来价格方差也就是 $\theta^{(4)}$ 未来价格的方差, 但其未来价格的均值较 $\theta^{(4)}$ 增加了 λ. 由 λ 的任意性, 新组合的收益率可在方差不变的前提下, 任意地改变均值. 于是我们在 σ-μ 平面上得到的图象就是一条平行于 μ 轴但不与之重合的直线. 由于 $\theta^{(4)}$ 是非 θ^{I} 剩余证券的最小方差组合, Ⅰ型组合的加入不改变方差, 所以 $\theta^{(4)}$ 也就是 S_n 的最小方差组合. 因此, 这条直线就是这种情形下的组合前沿.

容易知道, 以上的讨论已经涵盖了所有的情形. 定理得证.

这一结果与传统的组合前沿理论的不同之处, 主要体现在上图的情形三和情形四中. 从证明过程中我们容易看出, 我们定义的Ⅰ型组合起到关键性的作用. 而Ⅰ型组合既是一种套利组合, 又不能计算收益率, 因而被排除在传统 Markowitz 组合选择理论之外.

值得注意的是, Ⅰ型组合与Ⅱ型组合同属于无风险组合, 它们存在与否都可以由均值与协方差矩阵直接验证. 其当前价格和期望收益率也可以容易地计算出来. 因此, 我们的结果可望直接应用于组合选择理论的实际分析.

4. 有效子集判定条件

有了前面对于一般证券集的组合前沿的分析, 本节将从证券价格出发, 直接证明有效子集

的一条判定定理．下面先给出一条引理．

引理 4.1 若记 $S_k=\{1,2,\cdots,k\}$ 是 S_n 的非空子集，则对于任何 $i\in S_n$，总存在 $\theta_j^i\in R$，$j=1,2,\cdots,k$ 及方差有限的随机变量 ϵ_i^k，使得证券未来价格 x_i 有如下分解

$$x_i=\theta_1^i x_1+\theta_2^i x_2+\cdots\theta_k^i x_k+\epsilon_i^k, \tag{3}$$

其中 ϵ_i^k 满足

$$\mathrm{Cov}[x_j,\epsilon_i^k]=0,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

注：这里也不需要假设证券的当前价格非零．

证明 令 $y_i=x_i-E[x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$．于是 $E[y_i]=0$，$i=1,2,\cdots,n$．记 $L(n)$ 为 $\{y_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ 生成的线性空间，$L(k)$ 为 $\{y_j\}_{j=1,\cdots,k}$ 在 $L(n)$ 中生成的线性子空间．这里当两个随机变量依概率相等时，我们就认为它们相等．在 $L(n)$ 中定义内积：对于任何 $x,y\in L(n)$，$(x,y)=E[xy]$．容易验证，这时 $L(n)$ 成为有限维 Hilbert 空间，并且有 $(x,y)=E[xy]=\mathrm{Cov}[x,y]$．后式成立是由于 $L(n)$ 中的随机变量均值都是零．由于 $L(k)$ 为 $L(n)$ 的闭线性子空间，故任给 i，$i=1,2,\cdots n$，y_i 均有唯一的分解：

$$y_i=y_i^k+\eta_i$$

其中 $y_i^k\in L(k)$，$\eta_i\perp L(k)$，即存在 $\theta_j^i\in R$，$j=1,2,\cdots,k$，使得

$$y_i=\theta_1^i y_1+\theta_2^i y_2+\cdots+\theta_k^i y_k+\eta_i, \tag{4}$$

且有

$$\mathrm{Cov}[y_j,\eta_i]=0,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

令 $\epsilon_i^k=E[x_i]-\theta_1^i E[x_1]-\cdots-\theta_k^i E[x_k]+\eta_i$，不难由(4)得出结论(3)成立．此外，由 $\eta_i\in L(n)$，从而方差有限，还可以得出 ϵ_i^k 方差有限．

引理 4.2 设 r_a 和 r_b 为两种证券的收益率，$\mathrm{Var}[r_a]=\sigma_a^2$，$\mathrm{Var}[r_b]=\sigma_b^2$，$\sigma_a\sigma_b\neq 0$ 且 $\mathrm{Cov}[r_a,r_b]=0$．那么存在 $w\in(0,1)$，使得

$$\mathrm{Var}[(1-w)r_a+wr_b]<\min\{\sigma_a^2,\sigma_b^2\}.$$

证明 不难验证，

$$\begin{aligned}\min_{w\in(0,1)}\mathrm{Var}[(1-w)r_a+wr_b]&=\min_{w\in(0,1)}[(1-w)^2\sigma_a^2+w^2\sigma_b^2]\\&=\frac{\sigma_a^2\sigma_b^2}{\sigma_a^2+\sigma_b^2}<\min\{\sigma_a^2,\sigma_b^2\}.\end{aligned}$$

有了这些准备以后，我们就可以证明

定理 4.3 $S_k=\{1,2,\cdots,k\}\subset S_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 是 S_n 的有效子集的充分必要条件为：对于任何 $i\in S_n$，存在 $\theta_j^i\in R$，$j=1,2,\cdots,k$ 及随机变量 ϵ_i^k，使得

$$x_i=\theta_1^i x_1+\theta_2^i x_2+\cdots+\theta_k^i x_k+\epsilon_i^k, \tag{5}$$

其中 ϵ_i^k 满足

$$\mathrm{Cov}[x_j,\epsilon_i^k]=0,\quad j=1,2,\cdots,k, \tag{6}$$

且有

$$p_i=\sum_{j=1}^k\theta_j^i p_j,\quad E[\epsilon_i^k]=0. \tag{7}$$

注：$p_i-\sum_{j=1}^k\theta_j^i p_j$ 实际是 ϵ_i^k（作为证券组合）的当前价格．记之为 p_ϵ^i．(7)意味着 $p_\epsilon^i=0$．

证明 充分性：设(5)、(6)、(7)成立．考虑 S_n 中有非零当前价格的证券组合 $\theta=(\theta_1,\cdots,$

$\theta_n)^T\in R^n$ 的收益率 r_θ. 由第二节的讨论

$$r_\theta=\frac{\theta_1x_1+\cdots+\theta_nx_n-(\theta_1p_1+\cdots+\theta_np_n)}{\theta_1p_1+\cdots+\theta_np_n}\tag{8}$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\theta_j+\sum_{i=k+1}^{n}\theta_i\theta_j^i\right)x_j+\sum_{i=k+1}^{n}\theta_i\epsilon_i^k-\sum_{j=1}^{k}\left(\theta_j+\sum_{i=k+1}^{n}\theta_i\theta_j^i\right)p_j}{\sum_{j=1}^{k}\left(\theta_j+\sum_{i=k+1}^{n}\theta_i\theta_j^i\right)p_j}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}w_jr_j+\epsilon_\theta^k,\tag{9}$$

其中

$$w_j=\frac{(\theta_j+\sum_{i=k+1}^{n}\theta_i\theta_j^i)p_j}{\sum_{l=1}^{k}(\theta_l+\sum_{i=k+1}^{n}\theta_i\theta_l^i)p_l},\ j=1,\cdots,k;\quad \epsilon_\theta^k=\frac{\sum_{i=k+1}^{n}\theta_i\epsilon_i^k}{\sum_{l=1}^{k}(\theta_l+\sum_{i=k+1}^{n}\theta_i\theta_l^i)p_l}.$$

显然 ϵ_θ^k 作为当前价格为零的证券的组合, 其当前价格为零, 且

$$\mathrm{Cov}[r_j,\epsilon_\theta^k]=\mathrm{Cov}\left[\frac{x_j-p_j}{p_j},\epsilon_\theta^k\right]=0,\quad j=1,\cdots,k.$$

这样一来, 任意给定 $\bar{\mu}$, 对 S_n 生成的证券组合考虑 Markowitz 问题(1) 所得的最优解的方差不小于下述问题的最优解的方差,

$$\begin{cases}\min\quad \mathrm{Var}[\sum_{j=1}^{k}w_jr_j]+\mathrm{Var}[\epsilon_\theta^k]\\ \mathrm{s.t.}\quad w_1+w_2+\cdots+w_k=1\\ \qquad\ \ w_1\mu_1+w_2\mu_2+\cdots+w_k\mu_k=\bar{\mu}\end{cases}$$

当然也不会小于对 S_k 生成的证券组合考虑问题(1) 所得的最优解的方差, 这是因为 $\mathrm{Var}[\epsilon_\theta^k]\geq 0$. 由此可见, S_k 能够生成 S_n 的组合前沿. 于是 S_k 是 S_n 的有效子集.

必要性　(5)、(6) 的成立由引理 4.1 可得. 由 S_k 是 S_n 的有效子集可知, S_k 的组合前沿恒同于 S_n 的组合前沿. 下面只需证明(7) 对所有 $i>k$ 成立. 我们分两步证明.

(一) 证明对所有 i, 存在 $\theta_j^i\in R$, $j=1,2,\cdots,k$ 及随机变量 ϵ_i^k, 满足(5)、(6), 并使得 $p_\epsilon^i=0$, 即 $p_i=\sum_{j=1}^{k}\theta_j^ip_j$.

用反证法. 如果存在某个 $i>k$, 不妨假设就是 $i=k+1$, 使得 $p_\epsilon^i\neq 0$, 我们将证明 S_k 与 S_n 组合前沿不一致, 即 S_k 不是 S_n 的有效子集. 下面分两种情况来讨论.

当 S_k 生成组合的收益率的最小方差非零时(对应于定理 3.3 中情形一、三、五), 考虑 $S_{k+1}=\{1,2,\cdots,k+1\}$ 中当前价格非零的证券组合 $\theta^{k+1}=(\theta_1,\cdots,\theta_{k+1})^T\in R^{k+1}$ 的收益率. 则

$$r_{\theta^{k+1}}=\frac{\theta_1x_1+\cdots+\theta_{k+1}x_{k+1}-(\theta_1p_1+\cdots+\theta_{k+1}p_{k+1})}{\theta_1p_1+\cdots+\theta_{k+1}p_{k+1}}\tag{10}$$

由(6) 可知, 存在 $\theta_i'\in R$, $i=1,2,\cdots,k$, 使得

$$x_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\theta_i'x_i+\epsilon_{k+1}^k,\quad p_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\theta_i'p_i+p_\epsilon^{k+1},$$

且 $\mathrm{Cov}[x_j,\epsilon_{k+1}^k]=0$, $j=1,2,\cdots,k$. 故

$$r_{\theta^{k+1}}=\frac{\sum_{i=1}^{k}(\theta_i+\theta_i'\theta_{k+1})x_i+\theta_{k+1}\epsilon_{k+1}^k-\sum_{i=1}^{k}(\theta_i+\theta_i'\theta_{k+1})p_i-\theta_{k+1}p_\epsilon^{k+1}}{\sum_{i=1}^{k}(\theta_i+\theta_i'\theta_{k+1})p_i+\theta_{k+1}p_\epsilon^{k+1}}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} w_i r_i + w_{k+1} r_\epsilon, \tag{11}$$

其中

$$w_i = \frac{(\theta_i + \theta_i'\theta_{k+1})p_i}{\sum_{j=1}^{k}(\theta_j + \theta_j'\theta_{k+1})p_j + \theta_{k+1}p_\epsilon^{k+1}}, \quad i = 1, \cdots, k;$$

$$w_{k+1} = \frac{\theta_{k+1}p_\epsilon^{k+1}}{\sum_{j=1}^{k}(\theta_j + \theta_j'\theta_{k+1})p_j + \theta_{k+1}p_\epsilon^{k+1}}, \quad r_\epsilon = \frac{\epsilon_{k+1}^{k} - p_\epsilon^{k+1}}{p_\epsilon^{k+1}}.$$

令 $\overline{w}^k$ 对应于 S_k 张成的收益率方差最小的组合. 记其收益率为 $r_{\overline{w}^k}$, 记 $\sigma_{\overline{w}^k}^2 = \mathrm{Var}[r_{\overline{w}^k}]$, 于是 $\sigma_{\overline{w}^k}^2 > 0$. 由于 S_{k+1}和 S_k 的组合前沿相同, 故 S_{k+1}也不能张成收益率存在的无风险组合(即Ⅱ型组合), 因此 r_ϵ 作为 S_{k+1}的组合收益率, 其收益率方差一定大于零. 注意到, $r_{\theta^{k+1}}$的最小方差 σ^2 不大于下列问题的最小值:

$$\begin{cases} \min \quad (1 - w)^2\sigma_{\overline{w}^k}^2 + w^2\mathrm{Var}[r_\epsilon] \\ \text{s.t.} \quad w \in [0, 1] \end{cases}$$

易知, $\mathrm{Cov}[r_{\overline{w}^k}, r_\epsilon] = 0$, 由引理 4.2, $\sigma^2 < \sigma_{\overline{w}^k}^2$. 因此, S_{k+1}的组合收益率的最小方差要严格小于 S_k 的组合收益率的最小方差, 二者的组合前沿当然不相同, 这与假设矛盾. 因此这时一定有 $p_\epsilon^i = 0, i = k+1, \cdots, n$.

当 S_k 生成组合的收益率的最小方差是零时(对应于定理 3.3 中的情形二、四、六), 意味着 S_k 可以生成收益率存在的无风险组合(即Ⅱ型组合). 记该组合为 $\theta^{\mathrm{II}} = (\theta_1^{\mathrm{II}}, \cdots, \theta^{\mathrm{II}}{}_k)^T \in R^k$, 其当前价格 $p_{\mathrm{II}} = \sum_{i=1}^{k}\theta_i^{\mathrm{II}}p_i \neq 0$, 未来价格 $x_{\mathrm{II}} = \sum_{i=1}^{k}\theta_i^{\mathrm{II}}x_i$ 为常数. 不妨设 $p_{\mathrm{II}} = 1$.

若 $p_\epsilon^{k+1} \neq 0$, 只需令

$$\epsilon_k'' = \epsilon_{k+1}^{k} - p_\epsilon^{k+1}x_{\mathrm{II}}, \quad \theta_i'' = \theta_i^{k+1} + p_\epsilon^{k+1}\theta_i^{\mathrm{II}}, \quad i = 1, \cdots, k,$$

于是可以用 ϵ_k'' 来代替 ϵ_{k+1}^{k}, 用 θ'' 来代替 θ^{k+1}, 满足(5)、(6), 并且 ϵ_k'' 的当前价格为零.

(二) 证明, 在(一)的基础上, 还可以进一步代到 $E[\epsilon_i^k] = 0, i = k+1, \cdots, n$, 下面只需证 $E[\epsilon_{k+1}^k] = 0$.

容易知道, 当 S_k 中存在Ⅰ型组合时(对应定理 3.3 中情形三、四, 注意情形一、二中不会存在Ⅰ型组合), 与存在Ⅱ型组合时类似, 在存在满足(5)、(6)的 $\theta_j^{k+1} \in R, j = 1, 2, \cdots, k$, 随机变量 ϵ_{k+1}^k 以及 $p_\epsilon^{k+1} = 0$ 的基础上, 适当调整 $\theta_j^{k+1}, j = 1, 2, \cdots, k$ 与 ϵ_{k+1}^k, 使得它们还满足 $E[\epsilon_{k+1}^k] = 0$, 从而导出结论成立.

对于其他情形(即当 S_k 中不存在Ⅰ型组合时, 此时对应定理 3.3 中的情形一、二、五、六), 由于 $p_\epsilon^{k+1} = 0$, 与上面一样推导, 可得

$$r_{\theta^{k+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(\theta_i + \theta_i'\theta_{k+1})x_i + \theta_{k+1}\epsilon_{k+1}^k - \sum_{i=1}^{k}(\theta_i + \theta_i'\theta_{k+1})p_i}{\sum_{i=1}^{k}(\theta_i + \theta_i'\theta_{k+1})p_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} w_i' r_i + w_{k+1}'\epsilon_{k+1}^k, \tag{12}$$

其中

$$w_i' = \frac{(\theta_i + \theta_i'\theta_{k+1})p_i}{\sum_{j=1}^{k}(\theta_j + \theta_j'\theta_{k+1})p_j}, \ i = 1, \cdots, k; \ w_{k+1}' = \frac{\theta_{k+1}}{\sum_{j=1}^{k}(\theta_j + \theta_j'\theta_{k+1})p_j}.$$

容易知道, (12)中的 $(w_1', \cdots, w_{k+1}')^T \in R^{k+1}$除 $\sum_{i=1}^{k} w_i' = 1$ 外无其他约束. 事实上, 任取 $(w_1', \cdots$

$(w'_1, \cdots, w'_{k+1})^T \in R^{k+1}$ 满足 $\sum_{i=1}^k w'_i = 1$, 令 $\theta_{k+1} = w'_{k+1}$, $\theta_i = \frac{w'_i}{p_i} - \theta_i w'_{k+1}$, 于是, 上面的推导就导出相同的 $(w'_1, \cdots w'_{k+1})^T \in R^{k+1}$.

这样一来, 对 S_{k+1} 生成的证券组合考虑 Markowitz 问题(1) 等价于考虑下列问题

$$\begin{cases} \min \quad \mathrm{Var}[\sum_{j=1}^k w_j r_j] + \mathrm{Var}[w_{k+1}\epsilon^k_{k+1}] \\ \mathrm{s.t.} \quad w_1 + w_2 + \cdots + w_k = 1, w_{k+1} \in R \\ \qquad E[\sum_{j=1}^k w_j r_j + w_{k+1}\epsilon^k_{k+1}] = \overline{\mu} \end{cases}$$

对于证券期望收益率均相等的情形(对应于定理 3.3 中的情形一、二), 对(12) 式两端取期望, 由 $\sum_{i=1}^k w'_i = 1$, w'_{k+1} 可任意取值可知, $E[\epsilon^k_{k+1}] = 0$.

由定理 3.3 知, 现在只剩下图中的情形五、六. 在这两种情形下, 组合前沿的上半段(即有效前沿部分) 均可看成凹函数 $\overline{\mu} = \overline{\mu}(\overline{\sigma})$ 的图象. 下面用反证法证明, 此时也一定有 $E[\epsilon^k_{k+1}] = 0$ 成立.

假设 $E[\epsilon^k_{k+1}] \neq 0$. 我们指出, 对于任何由 S_k 生成的有效前沿上的距原点充分远的点 $(\sigma_{\overline{w}^k}, \mu_{\overline{w}^k})$ (设其中对应组合的收益率为 $\sum_{j=1}^k \overline{w}_j r_j$, 其中 $\sum_{j=1}^k \overline{w}_j = 1$), 任取与 $E[\epsilon^k_{k+1}]$ 同号的非零常数 $\overline{w}_{k+1}$, 由 $(\sigma_{\overline{w}^k}, \mu_{\overline{w}^k})$ 对应的组合与 $\overline{w}_{k+1}\epsilon^k_{k+1}$ 对应的组合加和成为一个新组合, 设其在 σ-μ 平面上对应 $(\sigma_{\overline{w}}, \mu_{\overline{w}})$, 那么该点一定在有效前沿的上方. 事实上,

$$\sigma_{\overline{w}} = \left(\mathrm{Var}\left[\sum_{j=1}^k \overline{w}_j r_j\right] + \mathrm{Var}[\overline{w}_{k+1}\epsilon^k_{k+1}]\right)^{1/2} = (\sigma^2_{\overline{w}^k} + \overline{w}^2_{k+1}\mathrm{Var}[\epsilon^k_{k+1}])^{1/2},$$

$$\mu_{\overline{w}} = E\left[\sum_{j=1}^k \overline{w}_j r_j + \overline{w}_{k+1}\epsilon^k_{k+1}\right] = \mu_{\overline{w}^k} + \overline{w}_{k+1}E[\epsilon^k_{k+1}].$$

由于 $\overline{\mu} = \overline{\mu}(\overline{\sigma})$ 是凹函数, 其任意步长的差商当 $\overline{\sigma}$ 增加时递减, 尤其是当 $\overline{\sigma} > \sigma_{\overline{w}^k}$ 且 $\sigma_{\overline{w}^k}$ 充分大时, 有

$$\frac{\overline{\mu} - \mu_{\overline{w}^k}}{\overline{\sigma} - \sigma_{\overline{w}^k}} \leq C,$$

其中 C 为某个常数. 但是

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\overline{w}} - \mu_{\overline{w}^k}}{\sigma_{\overline{w}} - \sigma_{\overline{w}^k}} &= \frac{\overline{w}_{k+1}E[\epsilon^k_{k+1}]}{(\sigma^2_{\overline{w}^k} + \overline{w}^2_{k+1}\mathrm{Var}[\epsilon^k_{k+1}])^{1/2} - \sigma_{\overline{w}^k}} \\ &= \frac{[(\sigma^2_{\overline{w}^k} + \overline{w}^2_{k+1}\mathrm{Var}[\epsilon^k_{k+1}])^{1/2} + \sigma_{\overline{w}^k}]\,|E[\epsilon^k_{k+1}]|}{|\overline{w}_{k+1}|\,\mathrm{Var}[\epsilon^k_{k+1}]} \end{aligned}$$

当 $\sigma_{\overline{w}^k}$ 趋向于 $+\infty$ 时, 只要 $E[\epsilon^k_{k+1}] \neq 0$, 它可以任意大. 这就是说, $(\sigma_{\overline{w}}, \mu_{\overline{w}})$ 一定可以位于有效前沿的上方, 从而第 $k+1$ 种证券的加入使 S_k 生成的有效前沿发生改变, 这就导出矛盾. 于是此时也一定有 $E[\epsilon^k_{k+1}] = 0$.

综上所述, 定理条件的必要性也已得证.

将定理 4.3 改写为传统组合分析理论的用证券收益率描述的形式, 可以得到

定理 4.4　$S_k = \{1, 2, \cdots, k\} \subset S_n$ 是 S_n 的有效子集的充分必要条件为对于任何 $i \in S_n$, 存在 $w^{ik} = (w^{ik}_1, \cdots, w^{ik}_k)^T \in R^k$, $\sum_{j=1}^k w^{ik}_j = 1$, 使得

$$E[r_i] = w^{ik}_1 E[r_1] + w^{ik}_2 E[r_2] + \cdots + w^{ik}_k E[r_k],$$

$$\mathrm{Cov}[r_i, r_j] = w^{ik}_1 \mathrm{Cov}[r_1, r_j] + w^{ik}_2 \mathrm{Cov}[r_2, r_j] + \cdots + w^{ik}_k \mathrm{Cov}[r_k, r_j],$$

$$j = 1, 2, \cdots, k.$$

定理 4.3 从证券价格出发得到了判定有效子集的一个充分必要条件. 它说明, 在证券允许卖空的前提下, 加入一种新证券(例如第 $k+1$ 种证券) 但不改变原证券集的有效子集, 等价于

加入一种当前价格为零,未来价格的期望也为零的新证券(即 ϵ_{k+1}^{k}).

定理4.3的形式与我们的前一篇文章[9]的定理4.1是相同的,不同的是我们从证券价格和组合前沿的分类入手,直接导出了该结论.在证明过程中,新证券相对于原证券集的分解贯穿始终,ϵ_{k+1}^{k}的经济含义一目了然.这是本文的主要特点.

参 考 文 献

[1] Comstantinides, G. M. & A. G. Malliaris, Portfolio theory, in R. A. Jarrow, V. Maksimovic & W. T. Ziemba (eds), *Finance*, Elsevier, Amsterdam, 1995, 1- 30.

[2] Huang, Chi-fu & R. H. Litzenberger, *Foundations for Financial Economics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[3] Huberman, Gur & S. Kandel, Mean-variance Spanning, *Journal of Finance*, **42** (1987), 873- 888.

[4] Jarrow, R. A., *Finance Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[5] Michaud, R. O., *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*, Havard Business School Press, Boston, 1998.

[6] Markowitz, H., Portfolio selection, *Journal of Finance*, **7** (1952), 77- 91.

[7] Markowitz, H., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Basil Blackwell, Cambridge, 1959, Second ed., 1991.

[8] Merton, R. C., On the microeconomic theory of investment under uncertainty, in K. J. Arrow and M. Intriligator, eds, *Handbook of Mathematical Economics*, Vol II, North-Holland, Amsterdam, 1982, 601 - 609.

[9] 史树中、杨杰,证券组合选择的有效子集,应用数学学报(待发).

CLASSIFICATION OF PORTFOLIO FRONTIERS AND EFFICIENT SUBSET FOR PORTFOLIO SELECTION

Yang Jie

(*Nankai Institute of Mathematics*, 300071, *Tianjin*, *China*)

Shi Shuzhong

(*Research Center for Financial Mathematics and Engineering*,

Peking University, 100871, *Beijing*, *China*)

(*Nankai Institute of Mathematics*, 300071, *Tianjin*, *China*)

Abstract Introducing prices of securities, this paper classifies general securities sets by portfolio frontier and then a direct proof for a determinant theorem about Efficient Subset is obained.

Keywords Portfolio selection theory, efficient subset, portfolio frontier