A. Libgober, Numerical characteristics of systems of straight lines on complete intersections, *Mat. Zametki*, 1973, Volume 13, Issue 1, 87–96

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 13, № 1 (1973), 87—96

УДК 519.4

ЧИСЛЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ ПРЯМЫХ НА ПОЛНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

А. С. Либгобер

Получена формула для вычисления числа прямых на полном пересечении гиперповерхностей и найден многочлен Гильберта многообразия прямых кубической трехмерной гиперповерхности. Библ. 3 назв.

Пусть $V_{r-s}^{n_1\ldots n_s}$ — алгебраическое многообразие в проективном пространстве $\mathbf{P}^r$ размерности r, которое есть полное пересечение s гиперповерхностей степеней $n_1, \ldots$ $\ldots, n_s$. Известно, что прямые в $\mathbf{P}^r$, лежащие на $V_{r-s}^{n_1\ldots n_s}$, если такие вообще имеются, можно параметризовать алгебраическим многообразием $s_1(V_{r-s}^{n_1\ldots n_s})$. Это многообразие канонически вложено в многообразие Грассмана, а потому и в некоторое проективное пространство.

Из формулы, полученной Предонцаном, следует, что для общего $V_{r-s}^{n_1\ldots n_s}$

$$\dim s_1(V_{r-s}^{n_1\ldots n_s}) = 2(r-1) - \sum\nolimits_{i=1}^{s}(n_i+1).$$

Поэтому, если

$$2(r-1) - \Sigma(n_i+1) = 0, \tag{1}$$

то на общем $V_{r-s}^{n_1\ldots n_s}$ расположено конечное число прямых. Например, давно известно, что на неособой кубической поверхности лежат 27 прямых.

Мы найдем число прямых на общем $V_{r-s}^{n_1\ldots n_s}$ в случае (1), т. е. когда их конечное число.

Для $\mathbf{P}^\alpha$ и $\mathbf{P}^\beta$, вложенных в $\mathbf{P}^\gamma$ (мы будем считать, что $\alpha + \beta > \gamma$) и не содержащихся ни в каком $\mathbf{P}^{\gamma-1}$, число прямых в $\mathbf{P}^\gamma$, их пересекающих и лежащих на общей $V^n_{\gamma-1}$, мы будем обозначать $N^{\alpha,\beta}_\gamma$.

Основной результат состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $\alpha + \beta = n + 1$, *то* $N^{\alpha,\beta}_\gamma$ *конечно и равно*

$$n \cdot n! \left[\sigma_{\alpha-1}\left(\ldots, \frac{n-i}{i}, \ldots\right) - \sigma_{n-\gamma}\left(\ldots, \frac{n-i}{i}, \ldots\right)\right],$$

где σ_k *есть* k*-й элементарный симметрический многочлен аргументов* $\frac{n-1}{1}, \frac{n-2}{2}, \ldots, \frac{n-i}{i}, \ldots, \frac{1}{n-1}$.

Отсюда легко следует

ТЕОРЕМА 2. *Если* $2r - n - 3 = 0$, *то число прямых на* V^n_{r-1} *конечно и равно*

$$n \cdot n! \left[\sigma_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{1}, \ldots, \frac{n-i}{i}, \ldots, \frac{1}{n-1}\right) - \right.$$
$$\left. - \sigma_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{n-1}{1}, \ldots, \frac{n-i}{i}, \ldots, \frac{1}{n-1}\right)\right],$$

где обозначения такие же, как и в теореме 1.

Пусть $\Omega_{a_0 a_1}$ $(0 \leqslant a_0 < a_1 \leqslant r)$ обозначает многообразие Шуберта прямых пространств $\mathbf{P}^r$, содержащихся в $\mathbf{P}^{a_1}$ и пересекающих $\mathbf{P}^{a_0} \subset \mathbf{P}^{a_1}$. Известно, что это неприводимое многообразие размерности $a_0 + a_1 - 1$, и если числа $r, n_1, \ldots, n_s$ удовлетворяют соотношению (1), то определено число

$$K_{i_1, \ldots, i_s} = (\Omega_{i_1,\ 2r-n_1-2-i_1}, \ldots \Omega_{i_s,\ 2r-n_s 2-i_s})$$

для любого набора чисел $i_1, \ldots, i_s$, удовлетворяющих неравенствам

$$\max(r - n_1 - 2, 0) < i_1 < r - \frac{n_1}{2} -$$
$$- 1, \ldots, \max(r - n_s - 2, 0) < i_s < r - \frac{n_s}{2} - 1,$$

вычисляемое стандартным образом, с помощью формул для умножения в кольце классов циклов с точностью до численной эквивалентности многообразия Грассмана.

ТЕОРЕМА 3. *Число прямых на* $V_{r-s}^{n_1 \dots n_s}$ *в случае*

$$2(r-1)-\sum\nolimits_{i=1}^{s}(n_i+1)=0$$

конечно и равно

$$\sum\nolimits_{i_1 \dots i_s} N_{r-i_1}^{n_1+2+i_1-r, r-i_1} \dots N_{r-i_s}^{n_s+2+i_s-r, r-i_s} K_{i_1 \dots i_s},$$

где каждый из индексов $i_1 \dots i_s$ *пробегает соответствующее множество значений*

$$\max(0, r-n_1-2) \leqslant i < r-\frac{n_1}{2}-1,$$

$$\max(0, r-n_s-2) \leqslant i_s < r-\frac{n_s}{2}-1.$$

Например,

$$\# s_1(V_3^5)=5^3 \cdot 23, \ \# s_1(V_3^{3,3})=3^4 \cdot 13, \ \# s_1(V_3^{2,4})=2^8 \cdot 5.$$

Во втором параграфе мы вычисляем многочлен Гильберта многообразия прямых, лежащих на кубической гиперповерхности в $\mathbf{P}$. Он оказывается равным $\frac{45}{2}n^2-\frac{45}{2}n+6$. В одной работе Фано была вычислена часть его коэффициентов.

§ 1. Конечные системы прямых. Для $\mathbf{P}^\alpha$ и $\mathbf{P}^\beta$, вложенных в $\mathbf{P}^\gamma$ $(\alpha+\beta>\gamma)$ и не содержащихся в $\mathbf{P}^{\gamma-1}$ (соответственно содержащихся в $\mathbf{P}^{\gamma-1}$, но не содержащихся ни в каком $\mathbf{P}^{\gamma-2}$), многообразие прямых, их пересекающих, обозначим $M_\gamma^{\alpha,\beta}$ (соответственно $\overline{M}_\gamma^{\alpha,\beta}$).

Многообразие прямых из $M_\gamma^{\alpha,\beta}$ (соответственно $\overline{M}_\gamma^{\alpha,\beta}$), лежащих на $V_{\gamma-1}^n$, обозначим $L_\gamma^{\alpha,\beta}$ (соответственно $\overline{L}_\gamma^{\alpha,\beta}$). $\mathbf{P}^{N(n,\gamma)}$ обозначает пространство коэффициентов уравнений гиперповерхностей степени n в $\mathbf{P}^\gamma$.

Доказательство теоремы 1 проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Для общей $V_{\gamma-1}^n$ многообразия $L_\gamma^{\alpha,\beta}$ и $\overline{L}_\gamma^{\alpha,\beta}$ при $\alpha+\beta=n+1$ нульмерны, а при $\alpha+\beta<n+1$ пусты.

Рассмотрим инцидентное соответствие Z_1 (соответственно Z_2) между $M_\gamma^{\alpha,\beta}$ (соответственно $\overline{M}_\gamma^{\alpha,\beta}$) и пространством $\mathbf{P}^{N(n,\gamma)}$, которое, будучи циклом $z_1 \subset M_\gamma^{\alpha,\beta} \times \mathbf{P}^{N(n,\gamma)}$ (соответственно $Z_2 \subset \overline{M}_\gamma^{\alpha,\beta} \times \mathbf{P}^{N(n,\gamma)}$), теоретико-множественно состоит из пар (l, V), где $l \in M_\gamma^{\alpha,\beta}$ (соответственно $l \in \in \overline{M}_\gamma^{\alpha,\beta}$), $V \in \mathbf{P}^{N(n,\gamma)}$ и l лежит на гиперповерхности V.

Слоем соответствия Z_1 (соответственно Z_2) над точкой из $M_\gamma^{\alpha,\beta}$ (соответственно $\overline{M}_\gamma^{\alpha,\beta}$) служит семейство гиперповерхностей степени n в $\mathbf{P}^\gamma$, проходящих через прямую. Это семейство является линейным пространством размерности $\binom{n+\gamma}{\gamma} - (n+1)$.

Многообразие Z_1 неприводимо, так как расслаивается над неприводимым многообразием $M_\gamma^{\alpha,\beta}$ на проективные пространства. Многообразие Z_2 состоит их двух компонент, соответствующих компонентам многообразия $\overline{M}_\gamma^{\alpha,\beta}$.

Образом соответствия Z_1 (соответственно Z_2) служит все пространство гиперповерхностей. Действительно, из работы [1] легко следует, что при $\alpha + \beta = n + 1$ имеем $s_1\,(V_{\gamma-1}^n \cdot \Omega_{1,\alpha+\beta}) > 0$, а поскольку $\Omega_{1,\alpha+\beta}$ входит в разложение $M_\gamma^{\alpha+\beta}$ с коэффициентом 1, то $(s_1\,(V_{\gamma-1}^n) \cdot M_\gamma^{\alpha,\beta}) > 0$.

Слоем соответствия Z_1 (соответственно Z_2) над общей точкой образа при проекции на $\mathbf{P}^{N(n,\gamma)}$ служит $L_\gamma^{\alpha,\beta}$ (соответственно $\overline{L}_\gamma^{\alpha,\beta}$). Принцип счета констант для соответствий Z_1 (соответственно Z_2) дает

$$\alpha + \beta + \binom{n+\gamma}{\gamma} - (n+1) = \binom{n+\gamma}{\gamma} + \\ + \dim L_\gamma^{\alpha,\beta} \text{ (соответственно } \overline{L}_\gamma^{\alpha,\beta}),$$

откуда при $\alpha + \beta = n + 1$ получаем $\dim L_\gamma^{\alpha,\beta} = = \dim \overline{L}_\gamma^{\alpha,\beta} = 0$. Если бы при $\alpha + \beta < n + 1$ образом соответствия Z_1 (соответственно Z_2) было бы все $\mathbf{P}^{N(n,\gamma)}$, то также имело бы место это соотношение. Однако при $\alpha + + \beta < n + 1$ оно невозможно.

Шаг 2. Если $\alpha + \beta = n + 1$, то

$$N_\gamma^{\alpha,\beta} = N_{\gamma+1}^{\alpha,\beta} - N_{\gamma+1}^{n+1-\gamma,\gamma}, \tag{2}$$

$$N_\gamma^{\alpha,\beta} = N_{n+1}^{\alpha,\beta} - N_{n+1}^{n+1-\gamma,\gamma}. \tag{3}$$

Равенство (3) следует из (2) индукцией вниз по γ. Докажем соотношение (2).

Пусть $\mathbf{P}^\alpha$ и $\mathbf{P}^\beta$ лежат в $\mathbf{P}^\gamma$ так, что они порождают все $\mathbf{P}^\gamma$.

Рассмотрим прямую C в $\mathbf{P}^{\gamma+1}$, не лежащую в $\mathbf{P}^\gamma$ и не пересекающую $\mathbf{P}^{\beta-1}$. Каждая точка $t \in C$ порождает вместе с $\mathbf{P}^{\beta-1}$ пространство $\mathbf{P}^{\beta}_{t}$. $\mathbf{P}^{\beta+1}$ обозначает пространство, порожденное $\mathbf{P}^{\beta-1}$ и C.

Пусть U — соответствие между C и $L^{\alpha,\beta+1}_{\gamma+1}$, построенным для общей V^n_γ и для выбранных выше $\mathbf{P}^\alpha$ и $\mathbf{P}^{\beta+1}$, определяемое теоретико-множественно, как множество пар (l, t) таких, что $l \in L^{\alpha,\beta}_{\gamma}$, построенному для $\mathbf{P}^\alpha$ и P^{β}_{t}.

Поскольку согласно шагу 1 $L^{\alpha,\beta+1}_{\gamma+1}$ есть слой неприводимого соответствия над $\mathbf{P}^{N(n,\gamma+1)}$, то в $\mathbf{P}^{N(n,\gamma+1)}$ существует открытое множество, для которого $L^{\alpha,\beta+1}_{\gamma+1}$ равноразмерно.

Слой проекции $U \to L^{\alpha,\beta+1}_{\gamma+1}$ есть либо прямая (для $l \in L^{\alpha,\beta+1}_{\gamma+1}$ — или лежащих в $\mathbf{P}^{\beta+1}$ или пересекающих $\mathbf{P}^\alpha \cap \mathbf{P}^{\beta-1}$) либо точка.

Поскольку шаг 1 утверждает, что в C существует открытое множество C', и что слой проекции $U \to C$ над точками C' нульмерны, то в слоях этого морфизма над C' нет общих точек цикла U. Поэтому проекция $U \to C$ над C' является плоским морфизмом.

Слоем U над точкой пересечения C и $\mathbf{P}^\gamma$ служит $\bar{L}^{\alpha,\beta}_{\gamma+1}$, и согласно шагу 1 эта точка принадлежит C', а слой над остальными точками есть $L^{\alpha,\beta}_{\gamma+1}$. Из плоскости следует, что

$$\chi(L^{\alpha,\beta}_{\gamma+1}) = \chi(\bar{L}^{\alpha,\beta}_{\gamma+1}).$$

$\chi(L^{\alpha,\beta}_{\gamma+1})$ есть, очевидно, $N^{\alpha,\beta}_{\gamma+1}$. Многообразие $\bar{L}^{\alpha,\beta}_{\gamma+1}$ состоит из прямых в $\mathbf{P}^\gamma$, которые пересекают $\mathbf{P}^\alpha$ и $\mathbf{P}^\beta$, и из прямых $\mathbf{P}^\gamma$, пересекающих $\mathbf{P}^\alpha \cap \mathbf{P}^\beta$. Число прямых первого типа равно $N^{\alpha,\beta}_{\gamma}$, а второго $N^{n+1-\gamma,\gamma}_{\gamma+1}$.

Согласно шагу 1 на общей $V^n_{\gamma-1}$ нет прямых, пересекающих $\mathbf{P}^\alpha \cap \mathbf{P}^\beta$ при $\alpha+\beta = n+1$. Поэтому

$$N^{\alpha,\beta}_{\gamma+1} = N^{\alpha,\beta}_{\gamma} + N^{n+1-\gamma,\gamma}_{\gamma+1},$$

как и утверждалось.

Шаг 3. Вычисление чисел $N^{\alpha,\beta}_{n+1}$ $(\alpha+\beta = n+1)$.

Каждая прямая в $\mathbf{P}^{n+1}$, пересекающая $\mathbf{P}^\alpha$ и $\mathbf{P}^\beta$, лежащая на гиперповерхности степени n, задается двумя точками $(x_0, \ldots, x_\alpha)$ и $(y_0, \ldots, y_\beta)$ пересечения с $\mathbf{P}^\alpha$ и $\mathbf{P}^\beta$ (предполагается, что точка пересечения $\mathbf{P}^\alpha$ и $\mathbf{P}^\beta$ не лежит на этой гиперповерхности).

Если уравнения $\mathbf{P}^\alpha$ имеют вид $z_{\alpha+1} = \ldots = z_{\alpha+\beta} = 0$, а $\mathbf{P}^\beta : z_0 = \ldots z_{\alpha-1} = 0$, то уравнения прямой имеют вид

$$z_0 = x_0 u, \ldots, z_\alpha = x_\alpha u + y_0 v, \; z_{\alpha+1} = y_1 v, \ldots, z_{\alpha+\beta} = y_\beta v. \quad (4)$$

Условия принадлежности прямой к гиперповерхности получаются приравниванием нулю коэффициентов при $u^\xi v^\eta$ $(\xi + \eta = n + 1)$ в многочлене, полученном заменой переменных (4) в уравнении гиперповерхности V_n^n. Таким образом, $L_{n+1}^{\alpha, \beta}$ лежит на $\mathbf{P}^\alpha \times \mathbf{P}^\beta$ и является пересечением дивизоров бистепеней $(n, 0)$, $(n - 1,1)$, ..., $(0, n)$.

Индекс их пересечения есть $N_\gamma^{\alpha, \beta}$ и равен, очевидно, коэффициенту при $x^\alpha y^\beta$ в многочлене $nx\,[(n-1)\,x + y] \ldots [x + (n-1)\,y]\,ny$. Этот коэффициент равен коэффициенту при $z^{\alpha-1}$ в многочлене

$$n\,(1 + (n-1)\,z) \ldots nz, \quad (5)$$

который есть $(\alpha - 1)$-й элементарный симметрический многочлен от нулей (5), которые равны $-\dfrac{1}{n-1}$, $-\dfrac{2}{n-2}, \ldots, -\dfrac{n-1}{1}$. Отсюда и из шага 2 следует теорема 1.

Далее многообразие прямых в $\mathbf{P}^r$, лежащих на V_{r+1}^n, есть $L_r^{r-1, r-1}$. Применение теоремы 1 дает теорему 2, поскольку $2r - n - 3 = 0$.

Выведем теперь из теоремы 1 теорему 3. Известно, что базис циклов многообразия Грассмана по модулю численной эквивалентности составляют шубертовы многообразия $\Omega_{a_0 a_1}$. Поэтому для любых r и n

$$s_1(V_{r-1}^n) = L_r^{r-1, r-1} \sim \sum_{\max(0,\, r-n-2) \leqslant i < r - \frac{n}{2} - 1}^{\alpha_i \Omega_{i,\, 2r-n-2-i}}. \quad (6)$$

Кроме того, $(\Omega_{i,\, 2r-n-2-i};\ \Omega_{n+2+i_0-r,\, r-i_0})$ равно единице при $i = i_0$ и нулю в противном случае [2]. Поэтому из (6) следует, что

$$\alpha_i = (L_r^{r-1, r-1}, \Omega_{n+2+i-r,\, r-i}) = N_{r-i}^{n+2+i-r,\, r-i-1}.$$

Многообразие прямых на пересечении гиперповерхностей есть пересечение многообразий прямых на каждой гиперповерхности. Поэтому

$$s_1 (V_{r-s}^{n_1 \ldots n_s}) = (s_1 (V_{r-1}^{n_1}) \ldots s_1 (V_{r-1}^{n_s})).$$

Вычисление этого индекса с помощью формул (6) дает утверждение теоремы 3.

§ 2. Прямые на кубической трехмерной гиперповерхности. Через $h_X(n)$ обозначается далее многочлен Гильберта многообразия X.

Рассуждая как при доказательстве шага 2, убеждаемся, что $h_{L_6^{3,3}} = h_{\bar{L}^{3,3}}$.

Многообразие $\bar{L}_6^{3,3}$ есть объединение двух многообразий: $L_5^{3,3}$ и $L_6^{1,5}$, которые пересекаются по $L_5^{1,4}$. Поэтому

$$h_{L_6^{3,3}} = h_{L_5^{3,3}} + h_{L_6^{1,5}} - h_{L_5^{1,4}}. \tag{7}$$

Далее $h_{L_5^{3,3}} = h_{\bar{L}_5^{3,3}}$. Многообразие $\bar{L}_5^{3,3}$ есть объединение многообразий $L_4^{3,3}$ и $L_5^{2,4}$, пересекающихся по $L_4^{2,3}$. Поэтому

$$h_{L_5^{3,3}} = h_{L_5^{2,4}} + h_{L_4^{3,3}} - h_{L_0^{2,3}}. \tag{8}$$

Аналогично $h_{L_6^{2,4}} = h_{\bar{L}_5^{2,4}}$. Многообразие $\bar{L}_6^{2,4}$ распадается на $L_5^{2,4}$ и $L_6^{1,5}$, которые пересекаются по $L_5^{1,4}$. Поэтому

$$h_{L_6^{2,4}} = h_{L_5^{2,4}} + h_{L_6^{1,5}} - h_{L_5^{1,4}}. \tag{9}$$

Комбинируя соотношения (7) — (9), получим

$$h_{L_4^{3,3}} = h_{L_6^{3,3}} - h_{L_6^{2,4}} + h_{L_4^{2,3}}. \tag{10}$$

Теперь вычислим каждый из многочленов в правой части.

Для любого цикла Z в $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$ через i_Z будем обозначать его вложение в $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$, P_1 и P_2 — проекции $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$ на каждый сомножитель.

Многообразие $L_6^{3,3}$ вложено в $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$ и является пересечением дивизоров бистепеней (3,0), (2,1), (1,2), (0,3).

Пусть D_1 — дивизор бистепени (3,0). Тогда имеем

$$0 \to p_1^* (O_{\mathbf{P}^3}(-3)) \to O_{\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3} \to O_{D_1} \to 0.$$

Домножая тензорно эту последовательность на $p_1^*(0\,(n)) \otimes p_2^*(0\,(m))$, получаем

$$\chi\,(i_{D_1}^*(p_1^*(O_{\mathbf{P}^3}(n))) \otimes p_2^*(O_{\mathbf{P}^3}(m)))) =$$
$$= \chi\,(O_{D_1} \otimes p_1^*(O\,(n)) \otimes p_2^*(O\,(m))) =$$
$$= \left[\binom{n+3}{3} - \binom{n}{3}\right]\binom{m+3}{3}.$$

Пусть D_2 — дивизор на D_1, высеченный дивизором на $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$ бистепени (0, 3). Из точной последовательности

$$0 \to i_{D_1}^*(p_2^*(O(-3))) \to O_{D_1} \to O_{D_2} \to 0$$

получаем

$$\chi\,(i_{D_1}^*(p_1^*(O\,(n)) \otimes p_2^*(O\,(m)))) =$$
$$= \left[\binom{n+3}{3} - \binom{n}{3}\right]\left[\binom{m+3}{3} - \binom{m}{3}\right] =$$
$$= \frac{1}{4}(3n^2 + 3n + 2)(3m^2 + 3m + 2).$$

Применим точную последовательность к дивизору D_3, высекаемому на D_2 дивизором в $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3$ бистепени (1,2):

$$0 \to i_{D_1}^*(p_1^*(O\,(-1)) \otimes p_2^*(O\,(-2))) \to O_{D_2} \to O_{D_3} \to 0.$$

Домножая эту последовательность на $i_{D_2}^*(p_1^*(O\,(n)) \otimes \otimes\, p_i^*(O\,(m)))$, получим

$$\chi\,(i_{D_3}^*(p_1^*(O\,(n)) \otimes p_2^*(O\,(m)))) =$$
$$= \frac{1}{4}(36mn^2 - 18n^2 + 18m^2n - 18mn + 30n + 24n - 12).$$

Наконец, $L_6^{3,3}$ высекается на D_3 дивизором бистепени (2,1). Поэтому есть точная последовательность, связанная с дивизором на D_3; она имеет вид

$$0 \to i_{D_3}^*(p_1^*(O\,(-2)) \otimes p_2^*(O\,(-1))) \to O_{D_3} \to O_{L_6^{3,3}} \to 0.$$

Эйлерова характеристика пучка $i_{L_6^{3,3}}^*(p_1^*(O\,(n)) \otimes \otimes p_2^*(O\,(m)))$ оказывается равной

$$9n^2 + 9m^2 + 45mn - 63n - 63m + 93.$$

Легко проверить, что пучок, связанный с гиперплоским сечением, при естественном вложении $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3 \to Gr(1, 6)$ есть $p_1^* (O(1)) \times p_2^* (O(1))$. Поэтому для получения многочлена Гильберта $L_6^{3,3}$ достаточно в последней формуле положить $n = m$.

Следовательно, получаем, что

$$h_{L_6^{3,3}} = 63n^2 - 126n + 93.$$

Многочлен Гильберта многообразия $L_6^{2,4}$ вычисляется аналогично: эта поверхность есть пересечение на $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^4$ четырех дивизоров бистепеней (3,0), (2,1), (1,2), (0,3).

Используя на каждом шаге точную последовательность, связанную с дивизором, получаем

$$h_{L_6^{2,4}} = \frac{3}{2}(27n^2 - 39n + 28).$$

Наконец, $h_{L_4^{2,3}}$ вычисляется с использованием соотношения

$$h_{L_4^{2,3}} = h_{L_5^{2,3}} + h_{L_4^{1,3}} - h_{L_5^{1,4}},$$

получаемого как и выше.

Каждое из многообразий, многочлен Гильберта которых стоит справа, есть пересечение дивизоров бистепеней (3,0), (1,2), (2,1), (0,3) на соответствующем произведении пространств.

После выкладок получаем

$$h_{L_5^{2,3}} = 63n - 72, \quad h_{L_4^{1,3}} = 18, \quad h_{L_5^{1,4}} = 18n - 9.$$

Поэтому

$$h_{L_4^{2,3}} = 45n - 45.$$

Подставляя полученные результаты в (10), получаем

$$h_{L_4^{3,3}} = \frac{45}{2}n^2 - \frac{45}{2}n + 6.$$

В частности, $p_a(L_4^{3,3}) = 5$, $\deg L_4^{3,3} = 45$, что дает классический результат Фано [3].

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность Ю. И. Манину, под руководством которого написана эта работа.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
22.VI.1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Predonzan A., Intorno agli S_k giacenti sulla varietá intersezione completa di più forme, Atti Acc. Naz. Lincei. Rend., ser. 8, 5, № 5 (1948), 238—242.
[2] Пидо Х., Методы алгебраической геометрии, М., 1954.
[3] Fano G., Sul sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietá cubica generale dello spazio a quattro dimensioni, Atti Acc. Sc. Torino, 39 (1904), 778—792.