C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 903–906, 2001
Logique/*Logic*
(Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*)

Relations d'équivalence analytiques complètes

Alain LOUVEAU, Christian ROSENDAL

Analyse fonctionnelle, Institut de mathématiques, Université Paris-6, boîte 186, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France
Courriel : louveau@ccr.jussieu.fr; rosendal@ccr.jussieu.fr

(Reçu le 16 juillet 2001, accepté le 8 octobre 2001)

Résumé. Nous montrons que plusieurs relations d'équivalence analytiques qui proviennent de la théorie des modèles ou de l'analyse sont complètes, c'est-à-dire maximum dans l'ordre de réduction borélienne. Ces résultats sont obtenus à partir de l'étude d'une classe plus générale d'objets, les quasi-ordres analytiques. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Complete analytic equivalence relations

Abstract. *We prove that various concrete analytic equivalence relations arising in model theory or analysis are complete, i.e., maximum in the Borel reducibility ordering. The proofs use some general results concerning the wider class of analytic quasi-orders.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Introduction

Les résultats de cette Note font partie de la théorie des relations d'équivalence analytiques, c'est-à-dire des relations d'équivalence sur un espace Polonais X qui sont analytiques comme parties du produit X^2. Cette théorie s'organise autour de la notion de *réduction borélienne* : si E, F sont deux relations d'équivalence analytiques sur les Polonais X, Y respectivement, on dit que E est boréliennement réductible à F, en symboles $E \leqslant_B F$, lorsqu'il existe une fonction borélienne $f : X \to Y$ (une *réduction*) qui satisfait, pour tous x_1, x_2 dans X, $x_1 E x_2 \Leftrightarrow f(x_1) F f(x_2)$.

Heuristiquement, X représente un ensemble d'objets mathématiques que l'on cherche à classifier à E-équivalence près, c'est-à-dire pour lesquels on cherche à trouver des invariants complets aussi simples que possible. L'ordre $E \leqslant_B F$ correspond alors à une comparaison de la complexité des problèmes de classification liés à E et à F, toute solution au problème de classification pour F fournissant, par composition avec la réduction, une solution à celui lié à E.

L'ordre de réduction borélienne a été beaucoup étudié ces quinze dernières années. Dans cette Note, nous allons considérer les relations d'équivalence analytiques qui sont *complètes*, c'est-à-dire maximum pour $\leqslant_B$. L'existence de telles relations est un fait très simple à établir, mais on ne connaissait pas de problèmes de classification naturels dont la complexité soit exactement de ce niveau, probablement par manque d'un critère pratique pour démontrer qu'une relation donnée E est bien complète. C'est un tel critère que nous allons proposer ici, et que nous allons utiliser pour établir qu'un certain nombre de

Note présentée par Gilles PISIER.

S0764-4442(01)02160-7/FLA

relations d'équivalence issues de la théorie des modèles ou de l'analyse sont en fait complètes, et donc, heuristiquement, correspondent à des problèmes de classification de difficulté maximale.

Notre méthode repose sur une dissymétrisation du problème initial, le problème dissymétrique, quoique plus compliqué a priori, s'avérant en fait plus naturel. Il met en jeu la notion de quasi-ordre analytique.

1. Quasi-ordres analytiques

Un *quasi-ordre* (ou pré-ordre partiel) R sur un ensemble X est une relation binaire sur X qui est réflexive et transitive. R est dit analytique si X est Polonais et R est une partie analytique de X^2.

Un quasi-ordre symétrique n'est donc rien d'autre qu'une relation d'équivalence. On peut toujours associer à un quasi-ordre R une relation d'équivalence $\equiv_R$ par $x \equiv_R y \Leftrightarrow xRy$ et yRx. Cette opération préserve clairement l'analyticité.

Un *ordre partiel* est un quasi-ordre R pour lequel $\equiv_R$ est l'égalité. *Un bel-ordre* est un quasi-ordre R pour lequel n'existent ni famille infinie d'éléments R-incomparables, ni suite infinie strictement R-décroissante.

On peut sans difficulté étendre, avec la même définition, l'ordre $\leqslant_B$ aux quasi-ordres analytiques (et même aux relations binaires analytiques quelconques). On dit alors qu'un quasi-ordre analytique R est *complet* s'il est maximum pour $\leqslant_B$ parmi les quasi-ordres analytiques.

PROPOSITION 1. – (a) *Il existe sur l'espace de Cantor un quasi-ordre analytique complet.*
(b) *Si R est un quasi-ordre analytique complet, $\equiv_R$ est une relation d'équivalence analytique complète.*

Par cette proposition, les problèmes évoqués dans l'introduction concernant les relations d'équivalence analytiques sont donc ramenés à des problèmes similaires pour les quasi-ordres analytiques.

2. Un exemple « simple » de quasi-ordre analytique complet

Pour tout ensemble X, $X^{<\omega}$ désigne l'ensemble des suites finies d'éléments de X. Si $s,t \in X^{<\omega}$, $|s|$ est la longueur de s et $s^\frown t$ la suite concaténée de s et t. On confond les suites de longueur 1 et les éléments de X correspondants. L'ordre d'extension entre suites est noté $\subseteq$, et pour $X = \omega$, on note $s \leqslant t$ l'ordre défini par $|s| = |t|$ et $\forall i < |s|,\ s(i) \leqslant t(i)$.

Un *arbre* sur X est une partie de $X^{<\omega}$ close par restrictions. Lorsque $X = X_1 \times X_2$, on confond une suite de paires avec la paire de suites de même longueur correspondante, et un arbre est alors un ensemble de paires de suites de même longueur, clos par restrictions. Un arbre T sur $X \times \omega$ est *normal* si $(u,s) \in T$ et $s \leqslant t$ impliquent $(u,t) \in T$. On note $T(s)$ l'ensemble $\{u \in X^{<\omega} : (u,s) \in T\}$.

Soit $2 = \{0,1\}$ et $\mathcal{T}$ l'ensemble des arbres normaux sur $2 \times \omega$. $\mathcal{T}$ s'identifie à une sous-partie fermée de $2^{(2\times\omega)^{<\omega}}$, et est donc Polonais compact (homéomorphe à C) pour la topologie produit usuelle.

Une fonction f de $\omega^{<\omega}$ dans $\omega^{<\omega}$ est *lipschiztienne* si f préserve longueurs et extension. De façon équivalente, f provient d'une (unique) fonction f_0 de $\omega^{<\omega}$ dans ω par la récursion $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(s^\frown n) = f(s)^\frown f_0(s^\frown n)$.

Pour T_1, T_2 dans $\mathcal{T}$, on définit un quasi-ordre $\leqslant_{\max}$ par $T_1 \leqslant_{\max} T_2$ s'il existe une fonction lipschitzienne f de $\omega^{<\omega}$ dans $\omega^{<\omega}$ telle que pour tout $s \in \omega^{<\omega}$ $T_1(s) \subseteq T_2(f(s))$.

THÉORÈME 2. – *Le quasi-ordre $\leqslant_{\max}$ est analytique complet sur $\mathcal{T}$.*

La démonstration de ce résultat passe par un résultat de « forme normale » pour les quasi-ordres analytiques :

THÉORÈME 3. – *Soit R un quasi-ordre analytique sur l'espace de Cantor $C = 2^\omega$. Il existe un arbre normal S sur $(2 \times 2) \times \omega$ satisfaisant* :
(i) *pour $x,y \in C$, $xRy \Leftrightarrow \exists \alpha \in \omega^\omega\ \forall n\ (x_{|n}, y_{|n}, \alpha_{|n}) \in S$.*
(ii) *pour tous $u \in 2^{<\omega}$ et $s \in \omega^{<\omega}$ de même longueur, $(u,u,s) \in S$.*

(iii) *pour tous* $u, v, w \in 2^{<\omega}$ *et* $s, t \in \omega^{<\omega}$ *de même longueur, si* $(u, v, s) \in S$ *et* $(v, w, t) \in S$*, alors* $(u, w, s+t) \in S$*, où* $+$ *est l'addition coordonnée par coordonnée.*

On prouve le théorème 2 en montrant que si R est un quasi-ordre analytique sur C et S est donné par le théorème 3, alors l'application de C dans $\mathcal{T}$ qui à x associe $T_x = \{(u, s) : (u, x_{|n}, s) \in S \text{ pour } n = |s|\}$ est une réduction borélienne (en fait continue) de R à $\leqslant_{\max}$.

Remarques. –

(a) Comme on ne considère que des arbres normaux, on peut dans la définition de $\leqslant_{\max}$ se restreindre aux fonctions lipschitziennes injectives, ou même strictement croissantes (au sens où l'application f_0 associée satisfait pour tous $s \in \omega^{<\omega}$ et $m < n$, $f_0(s^\frown m) < f_0(s^\frown n)$).

(b) Des démonstrations très analogues montrent que des variantes de $\leqslant_{\max}$ sont aussi des quasi-ordres analytiques complets, par exemple :

– sur $\mathcal{T}$, $T_1 \leqslant_1 T_2$ si $\exists \alpha \in \omega^\omega\ \forall n\ \forall s \in \omega^n\ T_1(s) \subseteq T_2(s + \alpha_{|n})$.
– sur l'espace $\mathcal{T}^*$ des arbres sur $2 \times \omega$ formés de suites (u, s) avec s strictement croissante, $T_1 \leqslant_2 T_2$ si $\exists \alpha \in \omega^\omega$ strictement croissante $\forall n\ \forall s \in \omega^n$ strictement croissante $T_1(s) \subseteq T_2(\alpha \circ s)$.

Il semble cependant que l'ordre $\leqslant_{\max}$ soit le plus simple à utiliser dans les applications.

3. Applications à l'abritement en théorie des modèles

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux structures, de domaines dénombrables respectifs A et B, dans un langage dénombrable $\mathcal{L}$. Suivant Fraïssé, on dit que $\mathcal{A}$ *s'abrite dans* $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$, s'il existe une fonction injective φ de A dans B qui réalise un isomorphisme entre $\mathcal{A}$ et la sous-structure $\mathcal{B}_{|\varphi(A)}$. L'abritement est un quasi-ordre, dont la relation d'équivalence associée, le bi-plongement, est en général distincte de l'isomorphisme.

Lorsqu'on s'intéresse aux modèles d'une théorie dénombrable T du premier ordre, ou plus généralement d'un énoncé σ du langage étendu $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ où on accepte les conjonctions et disjonctions dénombrables, on peut munir l'espace X_T (resp. X_σ) des modèles de T (resp. de σ) de domaine ω d'une topologie polonaise canonique, pour laquelle les restrictions $\sqsubseteq_T$, $\equiv_T$ et $\cong_T$ (resp. $\sqsubseteq_\sigma$, $\equiv_\sigma$ et $\cong_\sigma$) de l'abritement, du bi-plongement et de l'isomorphisme sont analytiques.

On connait depuis longtemps des cas de théories pour lesquelles l'isomorphisme est compliqué (maximum parmi les relations d'isomorphisme $\cong_\sigma$, $\sigma \in \mathcal{L}_{\omega_1\omega}$), alors que l'abritement est relativement simple. C'est le cas par exemple des ordres totaux dénombrables, où par le célèbre résultat de Laver résolvant la conjecture de Fraïssé, l'abritement est un bel-ordre. La même situation a aussi lieu pour les ordres partiels dénombrables qui sont des « arbres », c'est-à-dire tels que les prédécesseurs d'un point forment un ensemble fini totalement ordonné. Ces résultats suggèrent que le bi-plongement est plus simple que l'isomorphisme, mais c'est une impression trompeuse. Il est bien connu que l'isomorphisme entre structures dénombrables est très loin d'être complet. En fait, une relation d'équivalence analytique complète ne peut être engendrée par l'action borélienne d'un groupe Polonais, tandis que l'isomorphisme est engendré par une action continue du groupe des permutations de ω. A l'opposé, les résultats qui suivent montrent que l'abritement, et donc aussi le bi-plongement, peuvent être complets.

THÉORÈME 4. – *Soit* T_0 *la théorie des ordres partiels. L'abritement* $\sqsubseteq_{T_0}$ *entre ordres partiels dénombrables est un quasi-ordre analytique complet, et par suite le bi-plongement* $\equiv_{T_0}$ *est une relation d'équivalence analytique complète.*

Il existe en théorie des graphes une autre notion d'arbre : un *arbre combinatoire* est un graphe symétrique connexe et sans cycles. Cette notion s'exprime par un énoncé σ_0 de $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$.

THÉORÈME 5. – *L'abritement* $\sqsubseteq_{\sigma_0}$ *entre arbres combinatoires dénombrables est un quasi-ordre analytique complet, et par suite le bi-plongement* $\equiv_{\sigma_0}$ *est une relation d'équivalence analytique complète.*

Les démonstrations de ces deux résultats passent par la construction de réductions boréliennes de $\leqslant_{\max}$ à $\sqsubseteq_{T_0}$ et à $\sqsubseteq_{\sigma_0}$.

4. Applications à des structures séparables

Considérons tout d'abord les espaces métriques Polonais. Ils entrent dans le cadre de l'étude, car il existe un espace métrique Polonais universel, l'espace d'Urysohn U, tel que tout métrique Polonais soit isométrique à un sous-fermé de U. On peut alors munir l'espace X_{iso} des sous-fermés de U d'une topologie polonaise, pour laquelle l'isométrie $\cong_{\mathrm{iso}}$ est analytique. Gao et Kechris ont prouvé que $\cong_{\mathrm{iso}}$ est $\leqslant_B$-maximum parmi les relations d'équivalence engendrées par des actions boréliennes de groupes Polonais – et n'est donc pas complète. Soit $\leqslant_{\mathrm{iso}}$ le quasi-ordre de plongement isométrique entre éléments de X_{iso}. On obtient, comme conséquence du théorème 5 (en utilisant les arbres combinatoires dénombrables, avec leur distance canonique donnée par la longueur de l'unique chemin entre deux points), le corollaire suivant :

COROLLAIRE 6. – *Le plongement isométrique $\leqslant_{\mathrm{iso}}$ est un quasi-ordre analytique complet, et par suite le bi-plongement isométrique entre espaces métriques Polonais est une relation d'équivalence analytique complète.*

La relation d'homéomorphie entre compacts métrisables est un autre exemple naturel de relation d'équivalence entre structures séparables. Ici, on utilise l'espace X_{homeo} des compacts du cube de Hilbert, muni de la topologie compacte polonaise de Hausdorff, et on considère les relations d'homéomorphie $\cong_{\mathrm{homeo}}$ et de plongement continu $\leqslant_{\mathrm{homeo}}$ sur X_{homeo}. La position exacte de $\cong_{\mathrm{homeo}}$ dans l'ordre $\leqslant_B$ n'est pas connue, mais on sait qu'elle n'est pas complète, car $\cong_{\mathrm{homeo}} \leqslant_B \cong_{\mathrm{iso}}$.

THÉORÈME 7. – *L'ordre $\leqslant_{\mathrm{homeo}}$ est un quasi-ordre analytique complet, et par suite le bi-plongement continu entre compacts métrisables est une relation d'équivalence analytique complète.*

En fait, ce résultat est encore valable si on se restreint aux sous-compacts de $[0,1]^2$. Par contre, un résultat de Kada assure que, restreint aux sous-compacts de $[0,1]$, $\leqslant_{\mathrm{homeo}}$ est un bel-ordre.

Considérons finalement les espaces de Banach séparables. On peut alors prendre pour espace X_{Banach} l'espace des sous-espaces fermés de $\mathcal{C}([0,1])$ avec la norme sup, que l'on peut munir d'une topologie polonaise naturelle. La relation d'isométrie linéaire $\cong_{\mathrm{isolin}}$ entre Banach séparables coïncidant avec l'isométrie, on obtient $\cong_{\mathrm{isolin}} \leqslant_B \cong_{\mathrm{iso}}$, et $\cong_{\mathrm{isolin}}$ n'est pas complète (on ne sait d'ailleurs pas si réciproquement $\cong_{\mathrm{iso}} \leqslant_B \cong_{\mathrm{isolin}}$).

Définissons sur X_{Banach} les quasi-ordres :

– $B_1 \leqslant_{\mathrm{isolin}} B_2$ s'il existe T isométrie linéaire de B_1 dans B_2, et
– $B_1 \leqslant^c_{\mathrm{isolin}} B_2$ s'il existe T isométrie linéaire de B_1 dans B_2 avec $T(B_1)$ complémenté dans B_2.

THÉORÈME 8. – *Les quasi-ordres $\leqslant_{\mathrm{isolin}}$ et $\leqslant^c_{\mathrm{isolin}}$ sont analytiques complets sur X_{Banach}, et par suite les relations d'équivalence associées de bi-plongement isométrique et de bi-plongement isométrique complémenté sont aussi complètes.*

Les démonstrations des théorèmes 7 et 8 consistent de nouveau en la construction de réductions boréliennes aux quasi-ordres concernés de quasi-ordres complets, $\leqslant_{\max}$ pour le théorème 7 et $\sqsubseteq_{\sigma_0}$ pour le théorème 8.

Dans ce dernier cas, la démonstration fournit en fait des réductions dans la sous-famille des espaces de Banach isomorphes à c_0.

Il existe bien sûr sur X_{Banach} une autre série de quasi-ordres et relations d'équivalence naturels, liés non plus aux isométries mais aux isomorphies. Ces relations semblent plus difficiles à étudier. Nous ne savons pas en particulier si l'isomorphisme, ou si le bi-plongement isomorphique, entre Banach séparables sont des relations d'équivalence complètes.